

Movimiento turbulento de un líquido en un tubo de sección circular constante e infinitamente largo

M. Rodríguez

1 Ecuaciones

Supongamos un tubo de sección circular, de radio R , por el que discurre un líquido de densidad ρ y viscosidad μ en régimen turbulento. El campo de velocidades está dado por

$$\text{Eje } x : U + u' ; \text{ Eje } r : v'_r ; \text{ Eje } \theta : v'_\theta , \quad (1)$$

donde a la velocidad media U en la dirección del eje x se le superponen las velocidades de agitación turbulenta \vec{v}' .

Debido a que el movimiento es en la dirección del eje x (unidireccional para los valores medios), las componentes V_r y V_θ de la velocidad media son nulas y además u' , v'_r y v'_θ son independientes de x . Los valores medios de la velocidad tampoco dependen de θ y $\overline{v'_r v'_\theta} = 0$, lo que nos indica que $\overline{u'_i u'_j}$ no depende de θ .

Las ecuaciones que determinan el movimiento son

$$\frac{\partial(rU)}{\partial x} = 0 \Rightarrow U = U(r) , \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{u'v'_r})}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 , \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{v'^2_r})}{\partial r} + \frac{\overline{v'^2_\theta}}{r} = 0 . \quad (4)$$

Multiplicando (4) por dr e integrándola entre 0 y r se tiene

$$-\frac{p}{\rho} - \int_0^r \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{v'^2_r})}{\partial r} dr + \int_0^r \frac{\overline{v'^2_\theta}}{r} dr = -\frac{p(x,0)}{\rho} = -\frac{p_0(x)}{\rho} . \quad (5)$$

Derivando (5) con respecto a x se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_0}{dx} \Rightarrow p(x,r) = p_0(x) + \Phi(r) , \quad (6)$$

y llevando este resultado a (3) se obtiene

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d (r \overline{u'v'_r})}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0 , \quad (7)$$

ya que tanto U como $\overline{u'v'_r}$ no dependen más que de r .

De (7) se obtiene que $dp_0/dx = \text{constante}$ y por lo tanto se puede integrar con respecto a r para dar

$$-\frac{r^2}{2\rho} \frac{dp_0}{dx} - r\overline{u'v'_r} + \nu r \frac{dU}{dr} = 0, \quad (8)$$

que dividiendo por r y particularizando en la pared $r = R$, se reduce a

$$-\frac{R}{2} \frac{dp_0}{dx} = -\mu \left(\frac{dU}{dr} \right)_{r=R} = \tau_f = \rho u_*^2 = \frac{1}{2} C_f \rho U_0^2 = \frac{\lambda}{8} \rho U_0^2, \quad (9)$$

donde u_* es la velocidad de fricción, $U_0 = Q/\pi R^2$ y Q es el gasto volumétrico

$$Q = U_0 \pi R^2 = \int_0^R U(r) 2\pi r dr. \quad (10)$$

El coeficiente C_f es el coeficiente de fricción que puede expresarse en forma del coeficiente de fricción de Darcy $\lambda = 4C_f$. La velocidad de fricción u_* , definida como $u_* = \sqrt{\tau_f/\rho}$, puede expresarse en la forma $u_* = U_0 \sqrt{\lambda/8} = U_0 \sqrt{C_f/2}$. Sustituyendo en (8) el valor de dp_0/dx dado en (9) en función de u_* se tiene

$$\frac{ru_*^2}{R} - \overline{u'v'_r} + \nu \frac{dU}{dr} = 0. \quad (11)$$

En (11) U es del orden de U_0 , mientras que $\overline{u'v'_r}$ es del orden de u_*^2 según muestra la experiencia.

Utilizando las variables adimensionales

$$f = \frac{U}{U_0}; \quad g = \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2}; \quad y = 1 - \frac{r}{R}, \quad (12)$$

la ecuación (11) toma la forma

$$1 - y - g - \left(\frac{\nu U_0}{R u_*^2} \right) \frac{df}{dy} = 0. \quad (13)$$

La ecuación (13) es una ecuación diferencial de primer orden para determinar f ($f = 0$ en $y = 0$) pero, como en todos los movimientos turbulentos, aparece una incógnita más, los esfuerzos turbulentos g . Por lo tanto será necesario recurrir a resultados experimentales para cerrar el problema.

2 Regiones del movimiento

Estamos analizando el movimiento turbulento en tubos, de modo que el número de Reynolds $U_0 R/\nu \gg 1$. Además, en un movimiento turbulento completamente desarrollado, el número de Reynolds multiplicado por el coeficiente de fricción también es grande

$$\left(\frac{u_*}{U_0} \right)^2 \frac{U_0 R}{\nu} = \frac{\lambda U_0 R}{8 \nu} \gg 1, \quad (14)$$

como se demuestra experimentalmente. (En efecto, cuando el número de Reynolds es el valor más bajo correspondiente al movimiento turbulento en un tubo (≈ 4000), el coeficiente de fricción en un tubo liso es $\lambda \approx 0.04$, y $u_*^2 R/\nu U_0 \approx 20$).

Con la hipótesis anterior la ecuación (13) se reduce a

$$1 - y - g = 0, \quad (15)$$

que cumple la condición en el centro del tubo ($r = 0$ ó $y = 1$) donde $g = 0$, pero no la cumple en la pared ($r = R$ ó $y = 0$) donde se obtiene $g = 1$ y debe ser $g = 0$, ya que allí se anulan las fluctuaciones de la velocidad. La distribución de g que nos proporciona la ecuación (15) es la indicada en la figura 1.

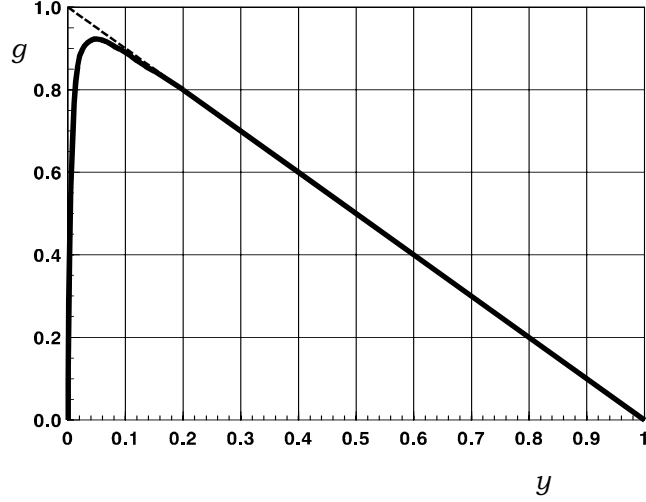


Figura 1.- Distribución radial de esfuerzos turbulentos.

Vemos que la solución falla a distancias y pequeñas (cerca de la pared) donde g sufre variaciones de orden unidad.

Para $y \sim 1$ vemos que $g \sim 1$, lo que quiere decir que $\overline{u'v'_r} \sim u_*^2 \ll U_0^2$, como ya habíamos adelantado, ya que $\lambda \ll 1$. Como en esta zona los efectos viscosos no cuentan, las diferencias de velocidad U con respecto a U_0 van a ser del orden de las fluctuaciones de velocidad, $u' \sim v'_r \sim u_* \ll U_0$, de los torbellinos grandes que son arrastrados por la corriente. Por lo que en esta región tendremos

$$f = \frac{U}{U_0} = 1 + \frac{u_*}{U_0} F(y), \quad (16)$$

denominada *ley del defecto de velocidades*.

Para valores $y \ll 1$ los efectos viscosos han de contar, puesto que en caso contrario no conseguiríamos anular la velocidad en la pared. Además la solución válida en el núcleo central nos dice que $g \rightarrow 1$, por lo que las fluctuaciones de velocidad siguen siendo del orden de u_* como lo confirman los resultados experimentales.

La ecuación (11) reescrita en función de la variable y toma la forma

$$u_*^2 (1 - y) - \overline{u'v'_r} - \nu \frac{dU}{d(Ry)} = 0, \quad (17)$$

que para valores pequeños de y ($y \ll 1$) queda

$$u_*^2 - \overline{u'v'_r} - \nu \frac{dU}{d(Ry)} = 0, \quad (18)$$

lo que nos indica que $U \sim u_*$ y la longitud característica es ν/u_* , ya que los efectos viscosos deben contar en esta zona. Por lo tanto (18) toma la forma

$$1 - g - \frac{dH}{d\eta} = 0, \quad (19)$$

con $\eta = yRu_*/\nu^1$ y $H = U/u_*$, que debe integrarse con la condición $H = 0$ en $\eta = 0$ (donde también es $g = 0$).

Supuesto conocido $g = g(\eta)$ tal que $g(0) = 0$ y $g(\infty) \rightarrow 1$, la ecuación (19) proporciona

$$H(\eta) = \eta - \int_0^\eta g(\eta) d\eta. \quad (20)$$

El empalme de la solución (16) con la solución (20) proporciona el valor de u_* o su equivalente C_f o λ . Existe una región intermedia (denominada *zona logarítmica*) en la que ambas soluciones de $U(r)$ empalman, ya que la ecuación (19) para $\eta \rightarrow \infty$ se reduce a $g = 1$; mientras que la ecuación (15), para $y \rightarrow 0$, se reduce también a $g = 1$. En esta región intermedia tanto las funciones como sus derivadas han de coincidir. La ecuación (16) en la región intermedia es (el subíndice i indica región intermedia)

$$U_i = U_0 + u_* F_i(y), \quad (21)$$

mientras que (20) en la región intermedia es

$$U_i = u_* H_i(\eta). \quad (22)$$

La igualdad de derivadas implica

$$u_* \frac{dF_i}{dy} = u_* \frac{dH_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dy}, \quad (23)$$

y como $d\eta/dy = Ru_*/\nu = 1/\delta$, (23) toma la forma

$$\frac{dF_i}{dy} = \frac{1}{\delta} \frac{dH_i}{d\eta}. \quad (24)$$

Multiplicando ambos miembros de (24) por y y teniendo en cuenta que $\eta = y/\delta$ se obtiene

$$y \frac{dF_i}{dy} = \eta \frac{dH_i}{d\eta}, \quad (25)$$

de modo que se puede escribir

$$y \frac{dF_i}{dy} = \frac{1}{\kappa}; \quad \eta \frac{dH_i}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}, \quad (26)$$

donde $\kappa \approx 0.41$ es la constante universal de Kármán. La solución de (26) proporciona

$$F_i = \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1; \quad H_i = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_2, \quad (27)$$

que es la forma de las funciones F y H en la región intermedia denominada logarítmica.

Sustituyendo F_i y H_i de (27) en (21) y (22) respectivamente, e igualando ambas se obtiene

$$U_0 + u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C_1 \right) = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_2 \right), \quad (28)$$

¹A la cantidad $\eta = yRu_*/\nu$ también se le denomina y^+ en la literatura.

y reescribiendo ambas en la misma variable (por ejemplo y) se llega a

$$U_0 + u_* C_1 = u_* \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R u_*}{\nu} \right) + u_* C_2. \quad (29)$$

Dividiendo la ecuación (29) por u_* y teniendo en cuenta que $u_*/U_0 = \sqrt{\lambda/8}$, se llega a

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R U_0}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + C_2 - C_1. \quad (30)$$

La ecuación (30) determina el coeficiente de fricción de Darcy λ , para tubos lisos, en función del número de Reynolds $R U_0/\nu$ y de dos constantes, la de Kármán κ y $C_2 - C_1$, que para tubos de sección circular toma el valor $C_2 - C_1 \approx 2$.

3 Efecto de la rugosidad

Cuando el tubo es rugoso con altura media de grano $h \ll R$, el problema cambia sólo en la zona interior, ya que en el núcleo central seguimos teniendo la ley del defecto de velocidades independiente del número de Reynolds y de la rugosidad relativa h/R . De acuerdo con la ecuación (18), válida para valores pequeños de y ($y \ll 1$), la solución será de la forma

$$U = \Psi(u_*, \nu, R y, h), \quad (31)$$

y el análisis dimensional proporciona

$$\frac{U}{u_*} = \Psi_1 \left(\frac{u_* R y}{\nu}, \frac{u_* h}{\nu} \right), \quad (32)$$

que escrita en las variables η y H toma la forma

$$H = \Psi_1 \left(\eta, \frac{u_* h}{\nu} \right), \quad (33)$$

por lo que en la región de empalme se tendrá

$$H_i = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_3 \left(\frac{u_* h}{\nu} \right), \quad (34)$$

que se diferencia de la dada en (27) en que la constante C_2 es ahora C_3 función de λ (a través de u_*) y del número de Reynolds basado en h . Sustituyendo (34) en (22) y el valor de F_1 , dado en (27), en (21) e igualando ambas, se llega a una relación análoga a (30)

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R U_0}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + C_3 \left(\frac{u_* h}{\nu} \right) - C_1, \quad (35)$$

con la diferencia de que $C_3 - C_1$ es ahora función de λ , a través de u_* , y del número de Reynolds basado en h , de modo que queda una relación general de la forma

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{U_0 R}{\nu}, \frac{h}{R} \right), \quad (36)$$

que es desconocida, puesto que no se conoce $C_3(u_* h/\nu)$.

Cuando $\nu/u_* \gg h$, la rugosidad es muy pequeña comparada con el espesor de la capa viscosa y estamos en el límite de los tubos lisos ya estudiados, y en este caso $C_3(u_*h/\nu) \rightarrow C_2$ porque $u_*h/\nu \rightarrow 0$. Sin embargo, cuando $\nu/u_* \ll h$, no tiene sentido hablar de la capa viscosa de espesor ν/u_* , ya que no existe por ser $\nu/u_*h \ll 1$. En este último caso conviene reescribir la ecuación (32) en la forma

$$\frac{U}{u_*} = \Psi_2 \left(\frac{Ry}{h}, \frac{\nu/u_*}{h} \right) = \Psi_2 \left(\bar{\eta}, \frac{\nu/u_*}{h} \right), \quad (37)$$

siendo ahora $\bar{\eta} = Ry/h$. En la región de empalme se obtiene

$$H_i = \frac{1}{\kappa} \ln \bar{\eta} + C_4 \left(\frac{\nu/u_*}{h} \right) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \ln \bar{\eta} + C_4(0), \quad (38)$$

ya que $\nu/u_*h \rightarrow 0$. Procediendo como en los dos casos anteriores, se obtiene, finalmente,

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R}{h} \right) + C_4(0) - C_1, \quad (39)$$

donde $C_4 - C_1 \approx 4.92$ para tubos de sección circular.

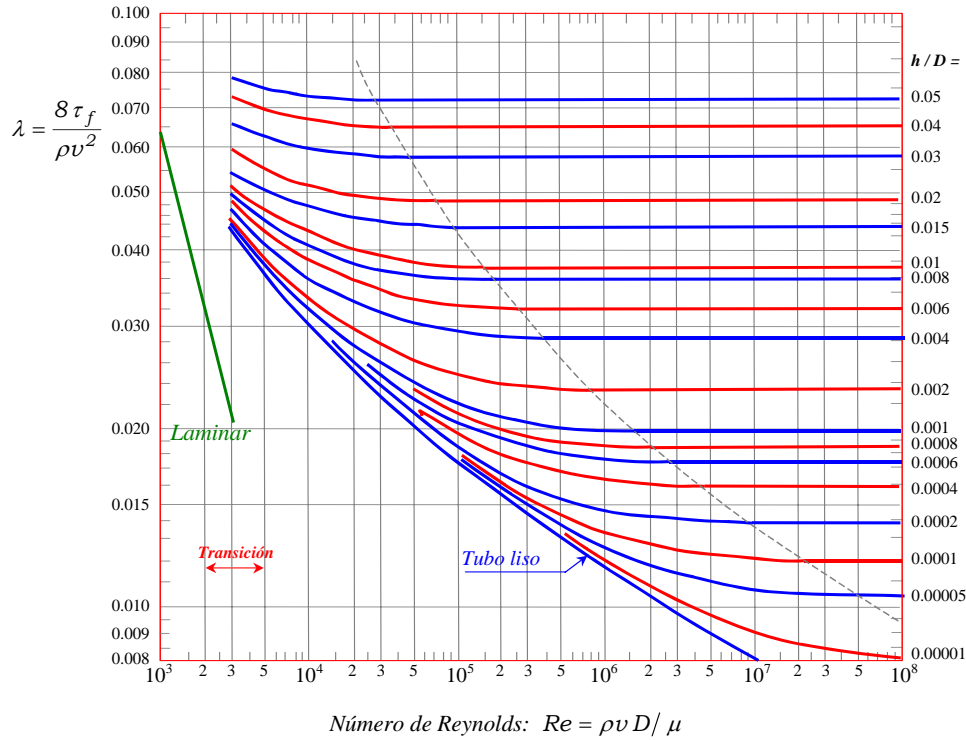


Figura 2.- Diagrama de Moody. Coeficiente de fricción de Darcy λ en función del número de Reynolds $Re = U_0D/\nu$, para distintos valores de la rugosidad relativa $\varepsilon = h/D$.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN DE DARCY: $\lambda = 8\tau_r/\rho v^2$											
Reynolds	Laminar	Tubo Liso	$h/D = 1E-5$	$h/D = 2E-5$	$h/D = 3E-5$	$h/D = 4E-5$	$h/D = 5E-5$	$h/D = 6E-5$	$h/D = 7E-5$	$h/D = 8E-5$	$h/D = 9E-5$
100	0.6400										
200	0.3200										
300	0.2133										
400	0.1600										
500	0.1280										
600	0.1067										
700	0.0914										
800	0.0800										
900	0.0711										
1000	0.0640										
2000	0.0320										
3000	0.0213	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0435
4000	0.0160	0.0398	0.0398	0.0398	0.0398	0.0398	0.0398	0.0398	0.0398	0.0399	0.0399
5000		0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0374	0.0374
6000		0.0354	0.0354	0.0354	0.0354	0.0354	0.0354	0.0355	0.0355	0.0355	0.0355
7000		0.0339	0.0339	0.0339	0.0339	0.0340	0.0340	0.0340	0.0340	0.0340	0.0340
8000		0.0327	0.0327	0.0327	0.0327	0.0327	0.0328	0.0328	0.0328	0.0328	0.0328
9000		0.0317	0.0317	0.0317	0.0317	0.0317	0.0317	0.0317	0.0318	0.0318	0.0318
10000		0.0308	0.0308	0.0308	0.0308	0.0308	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309
20000		0.0258	0.0258	0.0258	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0260	0.0260	0.0260
30000		0.0234	0.0234	0.0235	0.0235	0.0235	0.0236	0.0236	0.0236	0.0236	0.0237
40000		0.0219	0.0219	0.0220	0.0220	0.0220	0.0221	0.0221	0.0221	0.0222	0.0222
50000		0.0208	0.0209	0.0209	0.0209	0.0210	0.0210	0.0210	0.0211	0.0211	0.0212
60000		0.0200	0.0200	0.0201	0.0201	0.0202	0.0202	0.0202	0.0203	0.0203	0.0204
70000		0.0193	0.0194	0.0194	0.0195	0.0195	0.0196	0.0196	0.0196	0.0197	0.0197
80000		0.0188	0.0188	0.0189	0.0189	0.0190	0.0190	0.0191	0.0191	0.0192	0.0192
90000		0.0183	0.0184	0.0184	0.0185	0.0185	0.0186	0.0186	0.0187	0.0187	0.0188
100000		0.0179	0.0180	0.0180	0.0181	0.0181	0.0182	0.0183	0.0183	0.0184	0.0184
200000		0.0156	0.0157	0.0158	0.0158	0.0159	0.0160	0.0161	0.0161	0.0162	0.0163
300000		0.0144	0.0145	0.0146	0.0147	0.0148	0.0149	0.0150	0.0151	0.0152	0.0153
400000		0.0137	0.0138	0.0139	0.0140	0.0142	0.0143	0.0144	0.0145	0.0146	0.0147
500000		0.0131	0.0133	0.0134	0.0135	0.0137	0.0138	0.0139	0.0140	0.0142	0.0143
600000		0.0127	0.0129	0.0130	0.0132	0.0133	0.0134	0.0136	0.0137	0.0138	0.0140
700000		0.0124	0.0125	0.0127	0.0129	0.0130	0.0132	0.0133	0.0135	0.0136	0.0137
800000		0.0121	0.0123	0.0125	0.0126	0.0128	0.0130	0.0131	0.0133	0.0134	0.0135
900000		0.0118	0.0120	0.0122	0.0124	0.0126	0.0128	0.0129	0.0131	0.0132	0.0134
1000000		0.0116	0.0118	0.0120	0.0122	0.0124	0.0126	0.0128	0.0129	0.0131	0.0133
2000000		0.0103	0.0107	0.0110	0.0113	0.0115	0.0118	0.0120	0.0122	0.0124	0.0126
3000000		0.0097	0.0101	0.0105	0.0109	0.0112	0.0114	0.0117	0.0119	0.0121	0.0123
4000000		0.0093	0.0098	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117	0.0120	0.0122
5000000		0.0090	0.0096	0.0100	0.0104	0.0108	0.0111	0.0114	0.0116	0.0119	0.0121
6000000		0.0087	0.0094	0.0099	0.0103	0.0107	0.0110	0.0113	0.0116	0.0118	0.0120
7000000		0.0085	0.0092	0.0098	0.0102	0.0106	0.0110	0.0112	0.0115	0.0118	0.0120
8000000		0.0083	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117	0.0120
9000000		0.0082	0.0090	0.0096	0.0101	0.0105	0.0109	0.0112	0.0114	0.0117	0.0119
1.00E+07		0.0081	0.0090	0.0096	0.0101	0.0105	0.0108	0.0111	0.0114	0.0117	0.0119
2.00E+07		0.0073	0.0086	0.0093	0.0099	0.0103	0.0107	0.0110	0.0113	0.0116	0.0118
3.00E+07		0.0069	0.0084	0.0092	0.0098	0.0102	0.0106	0.0110	0.0113	0.0115	0.0118
4.00E+07		0.0067	0.0083	0.0092	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0118
5.00E+07		0.0065	0.0083	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0118
6.00E+07		0.0063	0.0082	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117
7.00E+07		0.0062	0.0082	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117
8.00E+07		0.0061	0.0082	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117
9.00E+07		0.0060	0.0082	0.0091	0.0097	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117
1.00E+08		0.0059	0.0082	0.0091	0.0097	0.0102	0.0105	0.0109	0.0112	0.0115	0.0117

Tabla I.- Coeficiente de fricción de Darcy, λ , en función del número de Reynolds, $Re = \rho v D / \mu$, y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h/D$.

La ecuación (39) proporciona el coeficiente de fricción de Darcy en función de la rugosidad relativa h/R , y no depende del número de Reynolds. Este es el caso correspondiente a movimientos a muy altos números de Reynolds (movimiento turbulento completamente desarrollado) en los que el coeficiente de fricción no depende de la viscosidad pero si depende de la rugosidad relativa.

Cuando $h \sim \nu/u_*$, el coeficiente de fricción es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, tal como se indica en la ecuación (36). Se puede obtener una relación que recupera la ecuación (30) para los tubos lisos en el límite $u_* h / \nu \rightarrow 0$, y la relación (39) en el límite opuesto. Esta relación es

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 4.92 - 2.46 \ln \left(\frac{h}{R} + 3.28 \frac{\nu}{U_0 R} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \right), \quad (40)$$

muy similar a la de Colebrook que se cita en la literatura.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN DE DARCY: $\lambda = 8\tau/\rho v^2$									
Reynolds	$h/D = 1E-4$	$h/D = 2E-4$	$h/D = 3E-4$	$h/D = 4E-4$	$h/D = 5E-4$	$h/D = 6E-4$	$h/D = 7E-4$	$h/D = 8E-4$	$h/D = 9E-4$
3000	0.0435	0.0436	0.0436	0.0437	0.0438	0.0439	0.0440	0.0441	0.0442
4000	0.0399	0.0400	0.0401	0.0402	0.0403	0.0404	0.0405	0.0406	0.0407
5000	0.0374	0.0375	0.0376	0.0377	0.0378	0.0379	0.0381	0.0382	0.0383
6000	0.0355	0.0356	0.0358	0.0359	0.0360	0.0361	0.0362	0.0363	0.0365
7000	0.0340	0.0342	0.0343	0.0344	0.0345	0.0347	0.0348	0.0349	0.0351
8000	0.0328	0.0330	0.0331	0.0332	0.0334	0.0335	0.0336	0.0338	0.0339
9000	0.0318	0.0320	0.0321	0.0322	0.0324	0.0325	0.0327	0.0328	0.0329
10000	0.0309	0.0311	0.0312	0.0314	0.0315	0.0317	0.0318	0.0320	0.0321
20000	0.0260	0.0262	0.0264	0.0267	0.0269	0.0271	0.0273	0.0275	0.0277
30000	0.0237	0.0239	0.0242	0.0245	0.0247	0.0250	0.0252	0.0254	0.0257
40000	0.0222	0.0225	0.0228	0.0231	0.0234	0.0237	0.0239	0.0242	0.0245
50000	0.0212	0.0215	0.0219	0.0222	0.0225	0.0228	0.0231	0.0234	0.0237
60000	0.0204	0.0208	0.0211	0.0215	0.0218	0.0222	0.0225	0.0228	0.0231
70000	0.0198	0.0202	0.0206	0.0210	0.0213	0.0217	0.0220	0.0223	0.0226
80000	0.0193	0.0197	0.0201	0.0205	0.0209	0.0213	0.0216	0.0220	0.0223
90000	0.0188	0.0193	0.0197	0.0202	0.0206	0.0209	0.0213	0.0217	0.0220
100000	0.0185	0.0189	0.0194	0.0198	0.0203	0.0207	0.0210	0.0214	0.0218
200000	0.0164	0.0170	0.0177	0.0182	0.0188	0.0193	0.0197	0.0202	0.0206
300000	0.0154	0.0162	0.0169	0.0176	0.0182	0.0187	0.0192	0.0197	0.0201
400000	0.0148	0.0157	0.0165	0.0172	0.0178	0.0184	0.0189	0.0194	0.0199
500000	0.0144	0.0154	0.0162	0.0170	0.0176	0.0182	0.0187	0.0193	0.0197
600000	0.0141	0.0152	0.0160	0.0168	0.0175	0.0181	0.0186	0.0191	0.0196
700000	0.0139	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0185	0.0191	0.0196
800000	0.0137	0.0148	0.0158	0.0166	0.0173	0.0179	0.0185	0.0190	0.0195
900000	0.0135	0.0147	0.0157	0.0165	0.0172	0.0178	0.0184	0.0190	0.0195
1000000	0.0134	0.0146	0.0156	0.0164	0.0172	0.0178	0.0184	0.0189	0.0194
2000000	0.0128	0.0142	0.0153	0.0162	0.0169	0.0176	0.0182	0.0187	0.0193
3000000	0.0125	0.0140	0.0152	0.0161	0.0168	0.0175	0.0181	0.0187	0.0192
4000000	0.0124	0.0140	0.0151	0.0160	0.0168	0.0175	0.0181	0.0186	0.0192
5000000	0.0123	0.0139	0.0150	0.0160	0.0168	0.0174	0.0181	0.0186	0.0192
6000000	0.0122	0.0139	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
7000000	0.0122	0.0138	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
8000000	0.0122	0.0138	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
9000000	0.0121	0.0138	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
1.00E+07	0.0121	0.0138	0.0150	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
2.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
3.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
4.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
5.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
6.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
7.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
8.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
9.00E+07	0.0120	0.0137	0.0149	0.0159	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191
1.00E+08	0.0120	0.0137	0.0149	0.0158	0.0167	0.0174	0.0180	0.0186	0.0191

Tabla I (continuación).- Coeficiente de fricción de Darcy, λ , en función del número de Reynolds, $Re = \rho v D / \mu$, y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h / D$.

El coeficiente de fricción de Darcy, λ , en función del número de Reynolds basado en el diámetro D del tubo, $Re = U_0 D / \nu$, y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h / D$, se da en la figura 2 y en la Tabla I y se denomina diagrama de Moody.

4 Tubos de sección no circular

Cuando el tubo no es de sección circular el valor del coeficiente de fricción va a ser el mismo que en el caso circular debido a que λ está determinado esencialmente de lo que ocurre cerca de la pared, como hemos visto anteriormente, y allí la pared puede considerarse localmente plana,

perdiendo memoria de la forma de la sección. Sin embargo es necesario utilizar una longitud que haga el papel del diámetro en el caso de los tubos circulares.

Esta longitud es el diámetro equivalente $D = 4r_h$. La magnitud r_h se denomina radio hidráulico y se define como el cociente entre el área A de la sección ocupada por el fluido dividida por el perímetro mojado por el fluido ℓ ; $r_h = A/\ell$.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN DE DARCY: $\lambda = 8\tau_f/\rho v^2$									
Reynolds	h / D = 1E-3	h / D = 2E-3	h / D = 3E-3	h / D = 4E-3	h / D = 5E-3	h / D = 6E-3	h / D = 7E-3	h / D = 8E-3	h / D = 9E-3
3000	0.0443	0.0451	0.0460	0.0468	0.0477	0.0485	0.0493	0.0501	0.0509
4000	0.0408	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446	0.0455	0.0463	0.0472	0.0481
5000	0.0384	0.0394	0.0405	0.0415	0.0425	0.0434	0.0444	0.0453	0.0462
6000	0.0366	0.0377	0.0388	0.0399	0.0410	0.0420	0.0430	0.0439	0.0449
7000	0.0352	0.0364	0.0376	0.0387	0.0398	0.0409	0.0419	0.0429	0.0439
8000	0.0340	0.0353	0.0366	0.0377	0.0389	0.0400	0.0411	0.0421	0.0431
9000	0.0331	0.0344	0.0357	0.0369	0.0381	0.0393	0.0404	0.0414	0.0425
10000	0.0323	0.0337	0.0350	0.0363	0.0375	0.0387	0.0398	0.0409	0.0420
20000	0.0279	0.0297	0.0314	0.0329	0.0344	0.0357	0.0370	0.0382	0.0394
30000	0.0259	0.0280	0.0299	0.0316	0.0331	0.0346	0.0360	0.0373	0.0385
40000	0.0247	0.0270	0.0291	0.0308	0.0325	0.0340	0.0354	0.0367	0.0380
50000	0.0239	0.0264	0.0285	0.0304	0.0321	0.0336	0.0351	0.0364	0.0377
60000	0.0234	0.0260	0.0282	0.0301	0.0318	0.0334	0.0348	0.0362	0.0375
70000	0.0229	0.0257	0.0279	0.0298	0.0316	0.0332	0.0347	0.0361	0.0374
80000	0.0226	0.0254	0.0277	0.0297	0.0314	0.0330	0.0345	0.0359	0.0373
90000	0.0223	0.0252	0.0275	0.0295	0.0313	0.0329	0.0344	0.0358	0.0372
100000	0.0221	0.0250	0.0274	0.0294	0.0312	0.0328	0.0344	0.0358	0.0371
200000	0.0210	0.0242	0.0268	0.0289	0.0307	0.0324	0.0340	0.0354	0.0368
300000	0.0205	0.0240	0.0265	0.0287	0.0306	0.0323	0.0339	0.0353	0.0367
400000	0.0203	0.0238	0.0264	0.0286	0.0305	0.0322	0.0338	0.0353	0.0366
500000	0.0202	0.0237	0.0264	0.0285	0.0305	0.0322	0.0338	0.0352	0.0366
600000	0.0201	0.0237	0.0263	0.0285	0.0304	0.0322	0.0337	0.0352	0.0366
700000	0.0200	0.0236	0.0263	0.0285	0.0304	0.0321	0.0337	0.0352	0.0366
800000	0.0200	0.0236	0.0263	0.0285	0.0304	0.0321	0.0337	0.0352	0.0365
900000	0.0199	0.0236	0.0262	0.0285	0.0304	0.0321	0.0337	0.0352	0.0365
1000000	0.0199	0.0235	0.0262	0.0284	0.0304	0.0321	0.0337	0.0352	0.0365
2000000	0.0197	0.0234	0.0262	0.0284	0.0303	0.0321	0.0336	0.0351	0.0365
3000000	0.0197	0.0234	0.0261	0.0284	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
4000000	0.0197	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
5000000	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
6000000	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
7000000	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
8000000	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
9000000	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
1.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
2.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
3.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
4.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
5.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
6.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
7.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
8.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
9.00E+07	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365
1.00E+08	0.0196	0.0234	0.0261	0.0283	0.0303	0.0320	0.0336	0.0351	0.0365

Tabla I (continuación).- Coeficiente de fricción de Darcy, λ , en función del número de Reynolds, $Re = \rho v D / \mu$, y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h / D$.

Obsérvese que el radio hidráulico de una sección circular es la mitad del radio geométrico, $r_h = \pi R^2 / 2\pi R = R/2$. La utilización del diámetro equivalente $D = 4A/\ell$, se justifica al establecer el equilibrio de fuerzas en un tramo de tubo de longitud Δx y área A

$$(p_1 - p_2) A = \tau_f \Delta x \ell ; \quad \frac{A}{\ell} \frac{p_1 - p_2}{\Delta x} = \frac{\lambda}{8} \rho U_0^2, \quad (41)$$

que coincide con la ecuación (9) sin más que cambiar $R/2$ por A/ℓ .

5 Caso de flujo de gases

Para el flujo de gases en conductos se puede utilizar el coeficiente de fricción de Darcy cuando el régimen es subsónico. En realidad el coeficiente de fricción de Darcy λ sería función de un parámetro más en el caso de gases, el número de Mach. Sin embargo la experiencia indica que esta dependencia es despreciable en régimen subsónico. Esto se puede justificar por el hecho de que el coeficiente de fricción depende esencialmente de la estructura del flujo en las proximidades de la pared donde el número de Mach es bajo y su efecto es despreciable.

En el régimen supersónico lo anterior no es válido porque las ondas que se generan afectan a la zona de empalme (denominada logarítmica anteriormente) cambiando la estructura del flujo con respecto al caso subsónico y haciéndola dependiente del número de Mach.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN DE DARCY: $\lambda = 8\tau/\rho v^2$					
Reynolds	$h/D = 1E-2$	$h/D = 2E-2$	$h/D = 3E-2$	$h/D = 4E-2$	$h/D = 5E-2$
3000	0.0517	0.0591	0.0659	0.0723	0.0784
4000	0.0489	0.0568	0.0638	0.0705	0.0767
5000	0.0471	0.0553	0.0626	0.0693	0.0757
6000	0.0458	0.0543	0.0617	0.0685	0.0750
7000	0.0448	0.0535	0.0611	0.0680	0.0745
8000	0.0441	0.0529	0.0606	0.0676	0.0741
9000	0.0435	0.0525	0.0602	0.0672	0.0738
10000	0.0430	0.0521	0.0599	0.0670	0.0735
20000	0.0406	0.0504	0.0585	0.0657	0.0724
30000	0.0397	0.0497	0.0580	0.0653	0.0720
40000	0.0392	0.0494	0.0577	0.0651	0.0719
50000	0.0389	0.0492	0.0576	0.0649	0.0717
60000	0.0388	0.0491	0.0575	0.0649	0.0717
70000	0.0386	0.0490	0.0574	0.0648	0.0716
80000	0.0385	0.0490	0.0573	0.0648	0.0716
90000	0.0384	0.0489	0.0573	0.0647	0.0715
100000	0.0384	0.0489	0.0573	0.0647	0.0715
200000	0.0381	0.0487	0.0571	0.0646	0.0714
300000	0.0380	0.0486	0.0571	0.0645	0.0714
400000	0.0379	0.0486	0.0570	0.0645	0.0713
500000	0.0379	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
600000	0.0379	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
700000	0.0379	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
800000	0.0379	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
900000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
1000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0645	0.0713
2000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
3000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
4000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
5000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
6000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
7000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
8000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
9000000	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
1.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
2.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
3.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
4.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
5.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
6.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
7.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
8.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
9.00E+07	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713
1.00E+08	0.0378	0.0485	0.0570	0.0644	0.0713

Tabla I (final).- Coeficiente de fricción de Darcy, λ , en función del número de Reynolds, $Re = \rho v D / \mu$, y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h/D$.