

Introducción Movimiento Turbulento

1 Escalas de la turbulencia

Los torbellinos más grandes están caracterizados por la velocidad ΔU y la longitud L tal que el número de Reynolds $(\Delta U)L/\nu \gg 1$. La frecuencia de estos torbellinos es $f_L \sim \Delta U/L$. La energía, por unidad de masa y tiempo, que ha de disiparse es $\varepsilon \sim (\Delta U)^3/L$.

La energía se transfiere a escalones intermedios de velocidad característica v_ℓ y tamaño característico ℓ , tales que $\ell v_\ell/\nu \gg 1$, además

$$\frac{v_\ell^3}{\ell} \sim \frac{(\Delta U)^3}{L} \rightarrow v_\ell \sim \Delta U \left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/3} \ll \Delta U,$$

y

$$f_\ell \sim \frac{v_\ell}{\ell} \sim \frac{\Delta U}{L} \left(\frac{L}{\ell}\right)^{2/3} \sim f_L \left(\frac{L}{\ell}\right)^{2/3} \gg f_L.$$

En la escala de Kolmogorov de velocidad v_η y tamaño característico η , es donde se disipa la energía, de modo que $\eta v_\eta/\nu \sim 1$. Además

$$v_\eta \sim \Delta U \left(\frac{\eta}{L}\right)^{1/3}; f_\eta \sim f_L \left(\frac{L}{\eta}\right)^{2/3}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\eta v_\eta}{\nu} \sim \frac{L \Delta U}{\nu} \left(\frac{v_\eta}{\Delta U}\right) \left(\frac{\eta}{L}\right) \sim Re \left(\frac{\eta}{L}\right)^{4/3} \sim 1,$$

de modo que

$$\frac{L}{\eta} \sim Re^{3/4}; v_\eta \sim \Delta U \times Re^{-1/4}; f_\eta \sim f_L \times Re^{1/2}.$$

Si se quiere mallar un volumen de dimensión característica L y capturar la disipación viscosa, hay que hacer una malla de tamaño característico η (y con algo de resolución $\eta/3$). Por lo tanto el número de celdas será tal que

$$\text{número de celdas} \sim \left(\frac{L}{\eta/3}\right)^3 \sim 27 \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim 27 \times Re^{9/4}.$$

Para un número de Reynolds del orden de 10^4 se obtiene un número de celdas del orden de 10^{10} (diez mil millones de celdas) y con $Re \sim 10^5$ son necesarias del orden de varios billones de celdas.

La turbulencia se caracteriza por:

Amplios rangos de tamaños (desde L hasta η) y de frecuencias (desde f_L hasta f_η).

Disipación.

Transporte y mezcla.

Tridimensionalidad.

2 Valores medios. Ecuaciones de Reynolds

Una magnitud fluida cualquiera $\varphi(\vec{x}, t)$ se escribe en la forma: $\varphi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) + \varphi'(\vec{x}, t)$, donde $\Phi(\vec{x}, t)$ es el valor medio de $\varphi(\vec{x}, t)$ y $\varphi'(\vec{x}, t)$ su fluctuación. Por definición $\overline{\varphi'} = 0$.

$$\Phi = \overline{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi dt.$$

La energía cinética es

$$\frac{1}{2} \overline{v_i v_i} = \frac{1}{2} \overline{(V_i + v'_i)(V_i + v'_i)} = \frac{1}{2} V_i V_i + \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} = K + k,$$

donde $K = \frac{1}{2} V_i V_i$ es la energía cinética media y $k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$ la energía cinética de las fluctuaciones turbulentas.

La intensidad de la turbulencia es: $\sqrt{\overline{v'_i v'_i}} = \sqrt{2k}$; mientras que el nivel de turbulencia es: $\frac{\sqrt{\overline{v'_i v'_i}}}{\sqrt{V_i V_i}} = \sqrt{\frac{k}{K}}$.

Para escribir la ecuaciones de Reynolds del movimiento de un fluido incompresible suponemos

$$v_i = V_i + v'_i; \quad p = P + p'; \quad T = \bar{T} + T'.$$

2.1 Ecuación de la continuidad

La ecuación de la continuidad para los valores instantáneos toma la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

y tomando valores medios se tiene

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{(V_i + v'_i)}}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0,$$

de modo que la ecuación de la continuidad es la misma para los valores medios que para los valores instantáneos.

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

2.2 Ecuación de la cantidad de movimiento

Promediando la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (V_i V_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho \overline{v'_i v'_j} \right), \quad (2)$$

donde el término $\overline{v'_i v'_j}$ proviene del promedio

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(V_i + v'_i)(V_j + v'_j)} = V_i V_j + \overline{v'_i v'_j}.$$

A las cantidades $-\rho \overline{v'_i v'_j}$, que modifican los esfuerzos viscosos $\mu \partial V_i / \partial x_j$, se les denomina esfuerzos aparentes de Reynolds y aparecen como nuevas incógnitas en las ecuaciones para determinar las magnitudes medias.

2.3 Ecuación de la energía

La ecuación de la energía, despreciando la disipación viscosa, toma la forma

$$\rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c \frac{\partial (V_i \bar{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \rho c \overline{T' v'_i} \right), \quad (3)$$

donde el término $\overline{T' v'_i}$ proviene de promediar

$$\overline{v_i T} = \overline{(V_i + v'_i)(\bar{T} + T')} = V_i \bar{T} + \overline{v'_i T'}.$$

A las cantidades $-\rho c \overline{T' v'_i}$ se les denomina flujo de calor aparente de Reynolds. También aparecen como nuevas incógnitas para la determinación del flujo medio.

2.4 Ecuación de la energía cinética media y turbulenta

Para el caso estacionario, la ecuación (2) puede escribirse en la forma

$$\rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (4)$$

siendo $\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j}$ y con $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$. La ecuación para la energía cinética media se obtiene multiplicando (4) por V_i , resultando

$$\rho V_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = V_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (V_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j},$$

pero

$$\tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} S_{ij} = 2\mu S_{ij} S_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j} S_{ij} = \Phi_v - \rho \overline{v'_i v'_j} S_{ij},$$

de modo que la ecuación para la energía cinética del movimiento medio queda

$$\rho V_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial (V_i \tau_{ij})}{\partial x_j} + \rho \overline{v'_i v'_j} S_{ij} - \Phi_v. \quad (5)$$

La ecuación de la energía cinética turbulenta se obtiene promediando la ecuación de la energía cinética instantánea y restándole la energía cinética del movimiento medio (5). Se obtiene

$$\rho V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{p'v'_i} - \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_j v'_j} + 2\mu \overline{v'_j s'_{ij}} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j S_{ij}} - 2\mu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}, \quad (6)$$

siendo $s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)$.

En las ecuaciones (5 y 6) puede observarse el traspaso de energía desde la corriente media $-\left(-\overline{\rho v'_i v'_j S_{ij}}\right)$ a los torbellinos de las escalas intermedias $+\left(-\overline{\rho v'_i v'_j S_{ij}}\right)$. Esta energía es del orden de $\rho\varepsilon$.

3 Viscosidad turbulenta

Para determinar las incógnitas que aparecen en las ecuaciones promediadas de Reynolds, se supone que los esfuerzos aparentes de Reynolds son de la misma forma que los esfuerzos viscosos, pero con una viscosidad turbulenta ν_T , que hay que determinar; esto es

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T S_{ij}. \quad (7)$$

Para la evaluación del flujo de calor turbulento se tiene

$$-\overline{T'v'_i} = \alpha_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, \quad (8)$$

donde α_T es la difusividad térmica turbulenta. El número de Prandtl turbulento, $Pr_T = \alpha_T/\nu_T$, se toma con frecuencia igual a la unidad, de modo que $\alpha_T \approx \nu_T$.

Tanto ν_T como α_T tienen dimensiones de velocidad por longitud, de modo que se trata de definir la velocidad y longitud apropiadas al movimiento turbulento, para obtener el valor de ν_T

$$\nu_T = C \times [V] \times [L]. \quad (9)$$

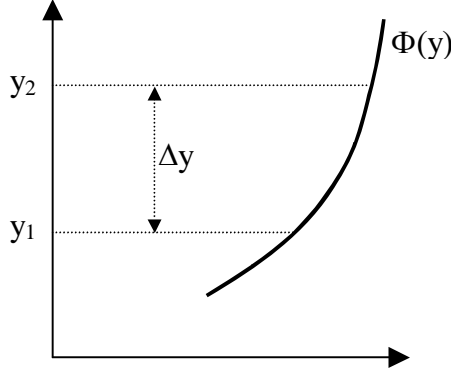
La teoría del camino de mezcla de Prandtl es uno de los primeros intentos de la determinación de la viscosidad turbulenta,

3.1 Teoría del camino de mezcla de Prandtl

La teoría del camino de mezcla de Prandtl supone que

$$\varphi'(y) \sim \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \sim -\Delta y \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{y_2},$$

siendo $\varphi = \Phi + \varphi'$.



de esta forma se tiene

$$u' \sim -\Delta y \frac{dU}{dy}; \quad \sqrt{u'^2} = \ell_1 \left| \frac{dU}{dy} \right|,$$

y en consecuencia

$$-\overline{u'v'} = -\sqrt{u'^2} \ell_2 \frac{dU}{dy} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy},$$

de modo que

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{dU}{dy},$$

siendo

$$\nu_T = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|.$$

La longitud ℓ depende del problema. Para flujos cercanos a una pared suele ser la distancia a la pared; para corrientes libres es el diámetro del chorro o la estela, etc. La hipótesis de semejanza de Kármán proporciona una estimación de la longitud ℓ en la forma

$$\ell = \kappa \left| \frac{dU/dy}{d^2U/dy^2} \right|,$$

donde $\kappa \approx 0.4$.

3.2 Modelos de turbulencia

Los modelos de turbulencia utilizados en la práctica son los modelos algebraicos, en los que la viscosidad turbulenta se modeliza mediante ecuaciones algebraicas, por lo que no es necesario integrar ninguna ecuación adicional. Están basados en la teoría de mezcla de Prandtl, pero mucho más elaborado. El más utilizado es el de Baldwin-Lomax.

Los modelos de una ecuación se caracterizan porque la velocidad típica es \sqrt{k} , la velocidad asociada a la energía cinética turbulenta. En este caso $\nu_T = \ell\sqrt{k}$, y la longitud ℓ se toma análoga a la de los modelos algebraicos. Estos modelos se denominan de una ecuación porque es necesario integrar una ecuación diferencial adicional, la que proporciona k , que es una versión simplificada de la (6).

En los modelos de dos ecuaciones, el más popular es el denominado modelo $k - \varepsilon$. En este modelo la velocidad es \sqrt{k} y la longitud es $k^{3/2}/\varepsilon$, de modo que

$$\nu_T = C \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Estos modelos se caracterizan porque es necesario integrar dos ecuaciones diferenciales más, una para la energía cinética turbulenta, k , y otra para la disipación, ε .

Los modelos anteriores suponen, en cada punto e instante, un valor único de ν_T , lo que presupone la no existencia de direcciones privilegiadas, lo que es válido para la viscosidad molecular, pero no siempre lo es en los movimientos turbulentos. Como consecuencia de esto se empiezan a utilizar otros tipos de modelos que definen un valor diferente de ν_T para cada esfuerzo.

Con la simulación directa de las ecuaciones no sería necesaria ninguna hipótesis sobre la turbulencia, pero eso implica llegar a tamaños como los de la escala de Kolmogorov, impracticable todavía en aplicaciones industriales. Los modelos denominados "Large Eddy Simulation" (LES), representan un estado intermedio entre la simulación directa y los modelos clásicos de turbulencia. Se resuelve exactamente hasta las escalas más pequeñas que es posible numéricamente, que son las más afectadas por las condiciones de contorno, y se hacen hipótesis sobre las escalas menores.

4 Flujos turbulentos esbeltos

Consideremos el caso bidimensional estacionario de un líquido para el flujo medio en el que las variables fluidas son $U(x, y)$, $V(x, y)$ y $P(x, y)$. Si el flujo es esbelto supondremos que la longitud característica, L , en la dirección del eje x es muy grande frente a la longitud característica, δ , en la dirección del eje y . La ecuación de la continuidad toma la forma

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta}; \quad V \sim U \frac{\delta}{L} \ll U.$$

La ecuación de cantidad de movimiento según el eje x es

$$\underbrace{U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y}}_{\frac{U^2}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2})}_{\frac{u'^2}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'})}_{\frac{u'^2}{\delta}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}_{\frac{\nu U}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{\frac{\nu U}{\delta^2}}$$

dado que $\delta \ll L$, la ecuación anterior se reduce a

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (10)$$

donde $\overline{u'v'} \sim U^2 (\delta/L) \ll U^2$.

La ecuación de cantidad de movimiento según y queda

$$\underbrace{U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y}}_{\frac{V^2}{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'})}_{\frac{u'^2}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2})}_{\frac{v'^2}{\delta}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}_{\frac{\nu V}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\frac{\nu V}{\delta^2}}$$

reduciéndose a

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho \overline{v'^2}) = U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \sim \frac{V^2}{\delta}. \quad (11)$$

De (11) se tiene $\Delta_\delta (P + \rho \overline{v'^2}) \sim \rho V^2$ y de (10) se tiene $\Delta_L P \sim \rho U^2$, de modo que

$$\frac{\Delta_\delta (P + \rho \overline{v'^2})}{\Delta_L P} \sim \left(\frac{V}{U} \right)^2 \sim \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1,$$

lo que nos permite sustituir la ecuación de cantidad de movimiento según y por

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \rho \overline{v'^2} \right) \approx 0; \quad P + \rho \overline{v'^2} = P_e(x); \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_e}{dx} - \rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x},$$

que llevado a (10) toma la forma

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (12)$$

ya que $\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'})$.

Dentro de la aproximación de flujos esbeltos, podemos considerar la turbulencia libre, que se muestra a continuación y la capa límite turbulenta, que se mostrará más adelante.

5 Turbulencia libre

En la turbulencia libre, la presión exterior es constante, de modo que $dP_e/dx \approx 0$: Además hay ausencia de paredes, por lo que el término viscoso $\nu (\partial^2 U / \partial y^2) \ll \partial (-\overline{u'v'}) / \partial y$. Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento toman la forma

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}).$$

5.1 Estela (bidimensional) lejana

$$U = U_\infty + \tilde{U}; \quad \tilde{U} \ll U_\infty; \quad v' \sim \tilde{U}.$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad V \sim \tilde{U} \frac{\delta}{x},$$

$$(U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}); \quad U_\infty \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \sim \frac{U_\infty \tilde{U}}{x} \gg \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \sim V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \sim \frac{\tilde{U}^2}{x},$$

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U} dy = -\frac{D}{\rho U_\infty} = -I; \quad y \rightarrow \pm\infty: \tilde{U} \rightarrow 0, \quad -\overline{u'v'} \rightarrow 0.$$

$$\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{\tilde{U}}{\delta}; \quad \tilde{U} \delta \sim I \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}; \quad \tilde{U} \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}.$$

Solución autosemejante

$$\delta(x) = a \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}; \quad u_s(x) = b \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}; \quad \tilde{U}(x, y) = -u_s(x) f(\eta); \quad -\overline{u'v'} = u_s^2(x) g(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)},$$

donde a y b son constantes que se han de determinar.

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{U_\infty u_s}{2x} \left(f + \eta \frac{df}{d\eta} \right); \quad \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) = \frac{u_s^2}{\delta} \frac{dg}{d\eta} \Rightarrow \frac{U_\infty \delta}{2x u_s} \left(f + \eta \frac{df}{d\eta} \right) = \frac{dg}{d\eta},$$

$$\frac{U_\infty \delta}{2x u_s} = \frac{a}{2b} ; \quad f + \eta \frac{df}{d\eta} = \frac{2b}{a} \frac{dg}{d\eta}.$$

Modelo de turbulencia

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= -\nu_T \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} ; \quad \nu_T \sim u_s \delta, \\ -\overline{u'v'} &= -\nu_T \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -\frac{\nu_T u_s}{\delta} \frac{df}{d\eta} = u_s^2 g(\eta) ; \quad g(\eta) = -\frac{\nu_T}{u_s \delta} \frac{df}{d\eta} = -\frac{1}{R_T} \frac{df}{d\eta}, \\ f + \eta \frac{df}{d\eta} &= -\left(\frac{2b}{a R_T} \right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} ; \quad \frac{2b}{a R_T} = 1. \\ f + \eta \frac{df}{d\eta} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} &= 0 ; \quad f(\infty) = f(-\infty) = 0 : \quad f = \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U} dy &= -I \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f d\eta = \frac{I}{u_s \delta} = \frac{1}{ab} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Las relaciones

$$ab = 1/\sqrt{2\pi} \quad \text{y} \quad 2b/a = R_T,$$

determinan a y b ya que $R_T \approx 12.5$ es un valor experimental.. El resultado es $a = 0.25$ y $b = 1.58$.

En la estela de un cilindro circular los valores experimentales muestran que $\tilde{U} = -u_s f(\eta)$ para $x > 80$ diámetros y $-\overline{u'v'} = u_s^2 g(\eta)$ para $x > 200$ diámetros.

5.2 Chorro (bidimensional) lejano

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 ; \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = \frac{M}{\rho} = m,$$

ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial (UV)}{\partial y} \right] dy = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} d(-\overline{u'v'}) = 0.$$

De las ecuaciones se tiene

$$V \sim U \frac{\delta}{x} ; \quad \frac{U^2}{x} \sim \frac{\overline{u'^2}}{\delta} \Rightarrow \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U} \sim \sqrt{\frac{\delta}{x}} ; \quad U^2 \delta \sim m.$$

Con $\delta \sim x$ se tiene $U_{max} \sim \sqrt{m/x}$. Utilizando la función de corriente

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

buscamos soluciones de semejanza de la forma

$$\delta = ax ; \quad \psi = b\sqrt{mx}F(\eta) ; \quad (-\overline{u'v'}) = \frac{m}{x}G(\eta) ; \quad \eta = \frac{y}{\delta}.$$

Por lo tanto

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{m}{x}} \frac{dF}{d\eta} ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = b\sqrt{\frac{m}{x}} \left(-\frac{1}{2}F + \eta \frac{dF}{d\eta} \right) ;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{b}{ax}\sqrt{\frac{m}{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{dF}{d\eta} + \eta\frac{d^2F}{d\eta^2}\right); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{b}{a^2x}\sqrt{\frac{m}{x}}\frac{d^2F}{d\eta^2}; \\ U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{b^2m}{2a^2x^2}\left[\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + F\frac{d^2F}{d\eta^2}\right] = -\frac{b^2m}{2a^2x^2}\frac{d}{d\eta}\left(F\frac{dF}{d\eta}\right); \quad \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) = \frac{m}{ax^2}\frac{dG}{d\eta} \\ \frac{b^2}{2a}\frac{d}{d\eta}\left(F\frac{dF}{d\eta}\right) &= -\frac{dG}{d\eta}\end{aligned}$$

Modelo de turbulencia

$$\begin{aligned}-\overline{u'v'} &= \nu_T\frac{\partial U}{\partial y}; \quad \nu_T = \frac{u_s(x)\delta(x)}{R_T}; \quad u_s(x) = U(x,0) = \frac{b}{a}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}\sqrt{\frac{m}{x}}, \\ -\overline{u'v'} &= \nu_T\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{b^2F'(0)m}{a^2R_Tx}\frac{d^2F}{d\eta^2} = \frac{m}{x}G(\eta); \quad G(\eta) = \frac{b^2F'(0)}{a^2R_T}\frac{d^2F}{d\eta^2}, \\ \frac{d}{d\eta}\left(F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2}\right) &= 0 \quad \text{con} \quad \frac{2F'(0)}{aR_T} = 1 \quad \text{y con} \quad F(0) = F''(0) = 0 \quad \text{y} \quad F'(\infty) = 0.\end{aligned}$$

Integrando una vez se tiene

$$F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2} = 0,$$

llegándose a

$$F(\eta) = \sqrt{2}\tanh\left(\eta/\sqrt{2}\right); \quad F'(\eta) = \text{sech}^2\left(\eta/\sqrt{2}\right) = \frac{4}{\left(e^{\eta/\sqrt{2}} + e^{-\eta/\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Dado que $F'(0) = 1$ se tiene $a = 2/R_T \approx 0.078$ ($R_T \approx 25.7$). Por otro lado se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = m \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 d\eta = \frac{a}{b^2},$$

pero, dado que $F'(\eta)$ es conocida, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 d\eta = \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{b^2} \quad \Rightarrow \quad b \approx 0.203.$$

En resumen se tiene

$$\delta(x) \approx 0.078x; \quad u_s(x) = U(x,0) \approx 2.60\sqrt{\frac{m}{x}}; \quad \psi \approx 0.203\sqrt{mx}F(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$