

OTRAS APLICACIONES DE LA APROXIMACIÓN DE CAPA LÍMITE LAMINAR. CORRIENTES LIBRES.

1 Introducción

Los movimientos de chorros de líquido en el seno del mismo líquido, la estela de cuerpos en el seno de una corriente de líquido y la capa de mezcla bidimensional de dos líquidos se caracterizan porque la velocidad longitudinal es grande frente a la transversal, $v \ll u$; las derivadas con respecto a la coordenada longitudinal son pequeñas frente a las derivadas con respecto a la coordenada transversal, $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$; y que las variaciones transversales de presión son pequeñas frente a las longitudinales, $\Delta_y p \ll \Delta_x p$. En este tipo de corrientes libres la presión exterior es la ambiente y, como no varía con y , la presión es constante en todo el campo fluido.

Las ecuaciones que determinan este tipo de movimientos son

$$\frac{\partial (y^j u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^j v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (y^j uu)}{\partial x} + \frac{\partial (y^j uv)}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

donde $j = 0$ para simetría plana y $j = 1$ para simetría cilíndrica.

Haciendo uso de la ecuación de la continuidad, la ecuación (2) de la cantidad de movimiento también puede escribirse en la forma clásica

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.1)$$

aunque la forma dada en (2) es útil en algunos casos.

Para la solución de este tipo de problemas se puede utilizar la función de corriente ψ tal que

$$u = \frac{1}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{1}{y^j} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Los campos lejanos de chorros y estelas están caracterizados por la ausencia de longitud característica, lo mismo que en la capa de mezcla, de modo que es posible encontrar solución de semejanza, como se verá a continuación.

Para buscar la solución de semejanza haciendo uso del análisis dimensional, debe tenerse en cuenta que la dependencia con la viscosidad cinemática ν desaparece de las ecuaciones si se utiliza como variable dependiente $\nu/\sqrt{\nu}$ en lugar de ν , y como variable independiente $y/\sqrt{\nu}$ en lugar de y . Esto trae como consecuencia que debe utilizarse la función

$$\psi \nu^{-(j+1)/2} \quad (3)$$

en lugar de ψ , así como otros cambios en constantes que aparecen en cada caso particular.

2 Chorros

La geometría del chorro se representa esquemáticamente en la figura 1. La velocidad en la sección inicial del chorro es U y la sección de salida es $\left(\frac{\pi H}{4}\right)^j H$.

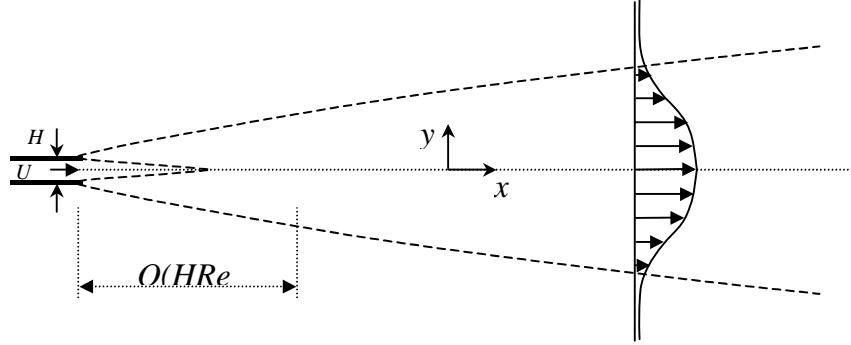


Figura 1.- Representación esquemática de un chorro.

Multiplicando la ecuación (2) por dy e integrándola transversalmente al chorro se obtiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u^2 y^j dy = \int_0^{\infty} d \left\{ y^j \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - uv \right) \right\} = 0,$$

de modo que

$$\int_0^{\infty} u^2 y^j dy = I = \text{constante}, \quad (4)$$

siendo I la cantidad de movimiento por unidad de masa, de valor igual al del inicio del chorro

$$I = U^2 \left(\frac{\pi H}{2} \right)^j \frac{H}{2}. \quad (5)$$

Para distancias $x \sim UH^2/\nu$ el chorro tiene un núcleo central no viscoso, limitado por una capa de mezcla que va incorporando al chorro líquido del exterior. En esta región intervienen tanto la velocidad U como la longitud H por separado, de modo que no existe solución de semejanza puesto que se dispone de una longitud y una velocidad para adimensionalizar las ecuaciones.

Para distancias x grandes frente a UH^2/ν los efectos viscosos ya afectan a todo el chorro y se pierde el detalle de lo que ocurre en esa primera región. Lo que se sigue cumpliendo es la integral (4), válida para todo x . Por lo tanto, lo único que va intervenir en la solución del campo lejano es el valor I de (4), pero no los valores de U y H por separado. En otras palabras, en la solución del campo lejano, la región inicial del chorro se ve como una fuente de cantidad de movimiento.

Como se ha dicho anteriormente, una de las variables independientes es $y/\sqrt{\nu}$, de modo que (4) debe escribirse como

$$\int_0^{\infty} u^2 \left(\frac{y}{\sqrt{\nu}} \right)^j d \left(\frac{y}{\sqrt{\nu}} \right) = \frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}}, \quad (4.1)$$

El problema a resolver es el formado por las ecuaciones (1) y (2) ó (2.1), junto con las condiciones de contorno: $u = 0$ en $y/\sqrt{\nu} \rightarrow \infty$; $v = 0$ y $\partial u / \partial (y/\sqrt{\nu}) = 0$ en $y/\sqrt{\nu} = 0$. Además debe cumplirse la relación integral (4.1).

De acuerdo con las ecuaciones y las condiciones de contorno, la solución es de la forma

$$\frac{\psi}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} = F \left[x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, \frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} \right]. \quad (6)$$

Las dimensiones de cada una de las magnitudes que intervienen en (6) son

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} & [=] V^{(1-j)/2} \times L^{(j+1)/2}, \\ x & [=] L, \\ \frac{y}{\sqrt{\nu}} & [=] V^{-1/2} \times L^{1/2}, \\ \frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} & [=] V^{(3-j)/2} \times L^{(j+1)/2}. \end{aligned}$$

Elijiendo x como longitud, las dimensiones de velocidad se obtienen de

$$V [=] \left[\frac{I}{(\sqrt{\nu x})^{j+1}} \right]^{2/(3-j)},$$

y el análisis dimensional proporciona

$$\frac{\psi}{(\sqrt{\nu x})^{j+1}} \left[\frac{I}{(\sqrt{\nu x})^{j+1}} \right]^{(j-1)/(3-j)} = f \left\{ \frac{y}{\sqrt{\nu x}} \left[\frac{I}{(\sqrt{\nu x})^{j+1}} \right]^{1/(3-j)} \right\}, \quad (7)$$

donde la función de corriente adimensional f es sólo función de la variable η

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x}} \left[\frac{I}{(\sqrt{\nu x})^{j+1}} \right]^{1/(3-j)}.$$

2.1 Chorro plano: $j = 0$

En este caso la función de corriente es

$$\psi = (\nu I x)^{1/3} f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = y \frac{I^{1/3}}{3(\nu x)^{2/3}}, \quad (8)$$

donde, por conveniencia, se ha introducido el factor 3 en el denominador de la definición de η . La ecuación a resolver es

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad (9)$$

con las condiciones de contorno

$$f(0) = f''(0) = f'(\infty) = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^\infty f'^2 d\eta = \frac{3}{2}, \quad (10)$$

donde la última condición proviene de la relación integral (4.1). En particular, la velocidad u está dada por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{I^{2/3}}{3(\nu x)^{1/3}} \frac{df}{d\eta}. \quad (11)$$

La solución es

$$f(\eta) = 3 \tanh\left(\frac{3}{2}\eta\right) ; \quad \frac{df}{d\eta} = \frac{9}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{3}{2}\eta\right). \quad (12)$$

La velocidad en el centro del chorro es

$$u_{max} = u(x, 0) = \frac{I^{2/3}}{3(\nu x)^{1/3}} \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0} \approx 0.4543 \frac{I^{2/3}}{(\nu x)^{1/3}}, \quad (13)$$

y el gasto volumétrico a través de una sección del chorro es

$$q = 2 \int_0^\infty u dy = 6^{2/3} (\nu I x)^{1/3} \approx 3.302 (\nu I x)^{1/3}. \quad (14)$$

2.2 Chorro axilsimétrico: $j = 1$

Para el caso axilsimétrico en el que $j = 1$ la función de corriente es

$$\psi = \nu x f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = y \frac{\sqrt{I}}{\nu x}. \quad (15)$$

La solución correspondiente a este caso¹ es

$$f(\eta) = \frac{\frac{3}{16\pi}\eta^2}{1 + \frac{3}{16\pi}\eta^2}, \quad (16)$$

y la velocidad u es

$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{I}{\nu x} \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} = \frac{3I}{8\pi \nu x} \left(1 + \frac{3}{64\pi}\eta^2\right)^{-2}, \quad (17)$$

de modo que la velocidad decrece como $1/x$, siendo la velocidad máxima $u_{max} = 3I / (8\pi \nu x)$.

El gasto volumétrico a través de una sección cualquiera del chorro es

$$Q = 2\pi \int_0^\infty u y dy = 8\pi \nu x. \quad (18)$$

3 Estelas

La geometría de la estela detrás de un cuerpo de longitud característica ℓ , sobre el que incide la corriente de un líquido (densidad ρ y viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$) de velocidad U_∞ , es la representada en la figura 2.

Aplicando la ecuación de la continuidad al volumen de control cilíndrico (o rectangular en el caso plano) de radio H , excluyendo al cuerpo, se tiene

$$\int_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 : -U_\infty \left(\frac{\pi H}{2}\right)^j 2H + \int_0^H u(\pi y)^j 2dy + \int_{-\infty}^x v(\pi H)^j 2dx = 0, \quad (19)$$

mientras que la ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \int_\Sigma \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma = - \int_\Sigma (p - p_\infty) \vec{n} d\sigma + \int_\Sigma \vec{n} \cdot \tau' d\sigma, \quad (20)$$

¹Véase, por ejemplo, "Viscous Fluid Flow" de F. M. White, McGraw-Hill, Inc.

proyectada en la dirección del movimiento, proporciona

$$-U_\infty^2 \left(\frac{\pi H}{2} \right)^j 2H + \int_0^H u^2 (\pi y)^j 2dy + U_\infty \int_{-\infty}^x v (\pi H)^j 2dx = -\frac{D}{\rho}, \quad (21)$$

donde D es la resistencia del cuerpo: $D = \vec{i} \cdot \left\{ \int_{\Sigma_{cuerpo}} (p - p_\infty) \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma} \vec{n} \cdot \tau' d\sigma \right\}$.

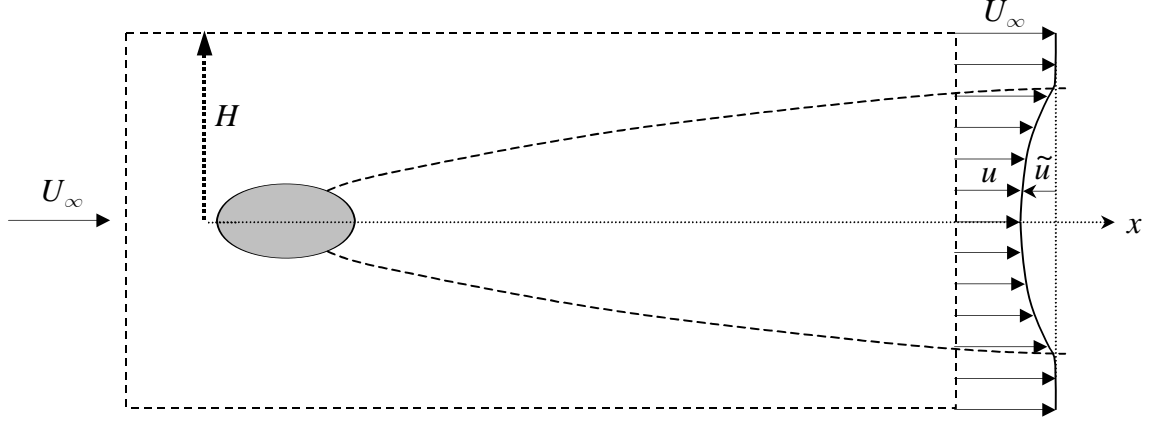


Figura 2.- Representación esquemática de una estela.

Despejando $\int_{-\infty}^x v (\pi H)^j 2dx$ de (19) y llevándolo a (21) se obtiene

$$\frac{D}{\rho} = -2 \int_0^\infty u (u - U_\infty) (\pi y)^j dy, \quad (22)$$

donde se ha puesto $H \rightarrow \infty$, ya que fuera de la estela la diferencia de velocidades $(u - U_\infty) \rightarrow 0$, de modo que no contribuye a la integral.

A distancias x aguas abajo del cuerpo, muy grandes frente a $\ell (U_\infty \ell / \nu)$, la velocidad en la estela no depende de la longitud característica del cuerpo y difiere poco de la velocidad exterior U_∞ . Si escribimos $u = U_\infty - \tilde{u}$ con $\tilde{u} \ll U_\infty$, La ecuación (22) toma la forma aproximada

$$\frac{D}{2\rho U_\infty} = \int_0^\infty \tilde{u} (\pi y)^j dy. \quad (23)$$

Con $u = U_\infty - \tilde{u}$, la ecuación de la continuidad (1) se deduce

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sim \frac{\tilde{u}}{x}; \quad \frac{1}{y^j} \frac{\partial (y^j v)}{\partial y} \sim \frac{v}{y} \Rightarrow \frac{v}{\tilde{u}} \sim \frac{y}{x} \ll 1,$$

ya que el tamaño transversal de la estela y es pequeño frente a x en la estela lejana.

La ecuación (2.1) de la cantidad de movimiento se puede linealizar para quedar

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\nu}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right), \quad (24)$$

donde el término $u (\partial u / \partial x) \approx -U_\infty (\partial \tilde{u} / \partial x) \sim U_\infty \tilde{u} / x$, mientras que el término $v (\partial u / \partial y) \approx -v (\partial \tilde{u} / \partial y) \sim \tilde{u}^2 / x \ll U_\infty \tilde{u} / x$.

El problema a resolver es ahora el dado por la ecuación (24) con la condición (23) y las condiciones de contorno: $\tilde{u} = 0$ en $y \rightarrow \infty$ y $\partial\tilde{u}/\partial y = 0$ en $y = 0$. En la ecuación (24) puede englobarse el factor ν/U_∞ en la variable independiente y , tal como se hizo anteriormente con ν , quedando (24) de la forma

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right)^j} \frac{\partial}{\partial\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right)} \left\{ \left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right)^j \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right)} \right\}.$$

A su vez, la relación (23) toma la forma

$$\frac{D}{2\rho U_\infty} \left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{(j+1)/2} = I = \int_0^\infty \tilde{u} \left(\pi y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right)^j d\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\right).$$

A la vista de lo anterior, la solución es de la forma

$$\tilde{u} = F\left(x, y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}, I\right).$$

Teniendo en cuenta que las dimensiones de $y\sqrt{U_\infty/2}$ son las de \sqrt{L} y las de I son las de $VL^{(j+1)/2}$, el análisis dimensional permite escribir

$$\frac{\tilde{u}x^{(j+1)/2}}{I} = f\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right), \quad (25)$$

de modo que llamando

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad (26)$$

se tiene

$$\tilde{u} = Ix^{-(j+1)/2} f(\eta). \quad (27)$$

La relación integral (23) toma la forma

$$\int_0^\infty f(\eta) (\pi\eta)^j d\eta = 1. \quad (28)$$

La ecuación diferencial para $f(\eta)$ se obtiene de

$$U_\infty \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = -U_\infty Ix^{-(j+3)/2} \left\{ \frac{(j+1)}{2} f + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} \right\},$$

y de

$$\frac{\nu}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} \right) = U_\infty Ix^{-(j+3)/2} \frac{1}{\eta^j} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^j \frac{df}{d\eta} \right),$$

de modo que la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\frac{(j+1)}{2} f + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} + \frac{1}{\eta^j} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^j \frac{df}{d\eta} \right) = 0, \quad (29)$$

a integrar con las condiciones $df/d\eta = 0$ en $\eta = 0$ y $f \rightarrow 0$ en $\eta \rightarrow \infty$, junto con la relación integral dada en (28).

3.1 Estela plana ($j = 0$)

En el caso plano ($j = 0$) la variable de semejanza es la dada en (26) con $\tilde{u} = (I/\sqrt{x}) f(\eta)$ y la ecuación diferencial (29) toma la forma

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2}\eta f \right) = 0,$$

cuya solución es

$$f = K \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right),$$

que cumple las condiciones $df/d\eta = 0$ en $\eta = 0$ y $f \rightarrow 0$ en $\eta \rightarrow \infty$. Para determinar K disponemos de (28)

$$\int_0^\infty f(\eta) d\eta = 1 \Rightarrow K \int_0^\infty e^{-\eta^2/4} d\eta = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

La solución queda

$$u = U_\infty - \tilde{u} = U_\infty - \frac{D/\rho}{2\sqrt{\pi x U_\infty \nu}} \exp\left(-\frac{y^2 U_\infty}{4\nu x}\right). \quad (30)$$

3.2 Estela axilsimétrica ($j = 1$)

En este caso la variable de semejanza sigue siendo la dada en (26) con $\tilde{u} = (I/x) f(\eta)$ y la ecuación diferencial (29) con $j = 1$ queda

$$f + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2}\eta^2 f \right) = 0,$$

y su solución es, de nuevo,

$$f = C \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right),$$

que ya cumple las condiciones en $\eta = 0$ y $\eta \rightarrow \infty$. Para determinar C disponemos de la condición (28) que ahora toma la forma

$$\pi \int_0^\infty f(\eta) \eta d\eta = 1 \Rightarrow C\pi \int_0^\infty e^{-\eta^2/4} \eta d\eta = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi}.$$

La solución queda

$$u = U_\infty - \tilde{u} = U_\infty - \frac{D/\rho}{4\pi\nu x} \exp\left(-\frac{y^2 U_\infty}{4\nu x}\right). \quad (31)$$

Obsérvese que el defecto de velocidades en el centro de la estela ($y = 0$) decrece con la distancia como $1/\sqrt{x}$ en el caso plano y como $1/x$ en el axilsimétrico, sin embargo el tamaño transversal de la estela crece en ambos casos como \sqrt{x} .

4 Capa de mezcla

Cuando se tienen dos corrientes de dos líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , viscosidades μ_1 y μ_2 y velocidades U_1 y U_2 ($U_2 < U_1$) que se ponen en contacto a partir de $x = 0$, tal como se muestra en la figura 3, las ecuaciones que determinan el movimiento son las dadas (1) y (2.1) con $j = 0$.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \quad (33)$$

donde $i = 1$ representa al líquido que ocupa el semiespacio $y > 0$ e $i = 2$ representa al líquido que ocupa el semiespacio $y < 0$.

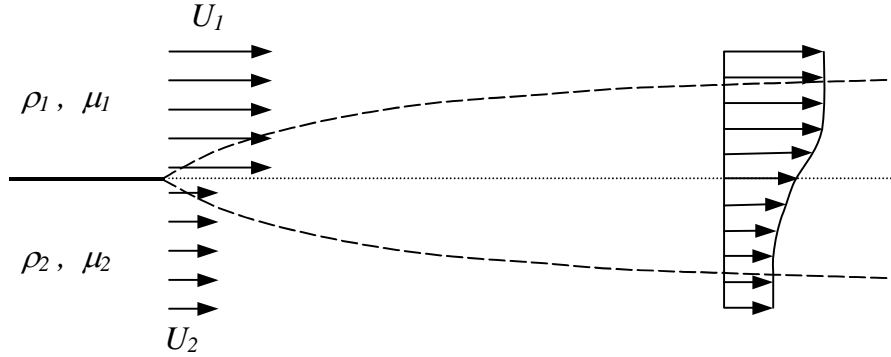


Figura 3.- Representación esquemática de una capa de mezcla de dos líquidos.

Las condiciones de contorno son

$$u_1 = U_1 \text{ para } y \rightarrow \infty \text{ y } u_2 = U_2 \text{ para } y \rightarrow -\infty, \quad (34)$$

junto con las condiciones en la interfase

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 = 0 \text{ y } \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \text{ en } y = 0. \quad (35)$$

Las ecuaciones (32) y (33) pueden escribirse, para cada una de las corrientes en la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial (v_i / \sqrt{\nu_i})}{\partial (y / \sqrt{\nu_i})} = 0, \quad (36)$$

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{v_i}{\sqrt{\nu_i}} \frac{\partial u_i}{\partial (y / \sqrt{\nu_i})} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial (y / \sqrt{\nu_i})^2}, \quad (37)$$

y la condición de contorno de igualdad de esfuerzos en la interfase queda

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial (y / \sqrt{\nu_1})} \right]_{y=0} = \sqrt{k} \left[\frac{\partial u_2}{\partial (y / \sqrt{\nu_2})} \right]_{y=0}, \quad (38)$$

donde $k = \frac{\rho_2 \mu_2}{\rho_1 \mu_1}$.

Las ecuaciones (36) y (37) junto con las condiciones (34) y (38) y la igualdad de velocidades $u_1 = u_2$ en $y = 0$, permiten escribir la solución en la forma

$$u_1 = F_1 \left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu_1}}, U_1, U_2, k \right); \frac{v_1}{\sqrt{\nu_1}} = G_1 \left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu_1}}, U_1, U_2, k \right) \text{ para } y > 0, \quad (39)$$

y

$$u_2 = F_2 \left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu_2}}, U_1, U_2, k \right); \frac{v_2}{\sqrt{\nu_2}} = G_2 \left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu_2}}, U_1, U_2, k \right) \text{ para } y > 0. \quad (40)$$

Utilizando el análisis dimensional, la solución, para $y > 0$, es de la forma

$$\frac{u_1}{U_1} = H_1 \left(y \sqrt{\frac{\nu_1 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right); v \sqrt{\frac{x}{\nu_1 U_1}} = J_1 \left(y \sqrt{\frac{\nu_1 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right), \quad (41)$$

mientras que para $y < 0$ es

$$\frac{u_2}{U_1} = H_1 \left(y \sqrt{\frac{\nu_2 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right); v \sqrt{\frac{x}{\nu_2 U_1}} = J_1 \left(y \sqrt{\frac{\nu_2 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right). \quad (42)$$

Obsérvese que se ha utilizado U_1 en la adimensionalización de ambas corrientes con objeto de poder incluir el caso $U_2 = 0$. Si se utiliza la función de corriente

$$u_i = \frac{\partial (\psi_i / \sqrt{\nu_i})}{\partial (y / \sqrt{\nu_i})}; \frac{v_i}{\sqrt{\nu_i}} = -\frac{\partial (\psi_i / \sqrt{\nu_i})}{\partial x}, \quad (43)$$

el análisis dimensional proporciona

$$\frac{\psi_1}{\sqrt{\nu_1 U_1 x}} = f_1 \left(y \sqrt{\frac{\nu_1 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right); \frac{\psi_2}{\sqrt{\nu_2 U_1 x}} = f_2 \left(y \sqrt{\frac{\nu_2 U_1}{x}}, \frac{U_2}{U_1}, k \right). \quad (44)$$

Utilizando las variables

$$\psi_1 = \sqrt{\nu_1 U_1 x} f_1(\eta_1) \text{ y } \psi_2 = \sqrt{\nu_2 U_1 x} f_2(\eta_2), \quad (45)$$

con

$$\eta_1 = y \sqrt{\frac{\nu_1 U_1}{x}} \text{ y } \eta_2 = y \sqrt{\frac{\nu_2 U_1}{x}}, \quad (46)$$

las ecuaciones que determinan el movimiento toman la forma:

$$f_i \frac{d^2 f_i}{d\eta_i^2} + 2 \frac{d^3 f_i}{d\eta_i^3} = 0, \quad (47)$$

donde $u_i = U_1 \frac{df_i}{d\eta_i}$ y $v_i = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu_i U_1}{x}} \left(f_i - \eta_i \frac{df_i}{d\eta_i} \right)$. Las condiciones de contorno son:

$$\eta_1 \rightarrow \infty : \frac{df_1}{d\eta_1} \rightarrow 1; \eta_2 \rightarrow -\infty : \frac{df_2}{d\eta_2} \rightarrow \frac{U_2}{U_1}, \quad (48)$$

$$\left(\frac{df_1}{d\eta_1} \right)_{\eta_1=0} = \left(\frac{df_2}{d\eta_2} \right)_{\eta_2=0}; f_1(0) = f_2(0) = 0; \left(\frac{d^2 f_1}{d\eta_1^2} \right)_{\eta_1=0} = \sqrt{k} \left(\frac{d^2 f_2}{d\eta_2^2} \right)_{\eta_2=0}. \quad (49)$$

En la figura 4 se muestran los resultados correspondiente a $k = 1$ (un sólo líquido) y $U_2/U_1 = 0$ y 0.5. También se muestran los resultados para $U_2/U_1 = 0$ y $k = 5.97 \times 10^4$ correspondiente a una corriente de aire y agua, junto con los valores de $k = 10$ y 100.

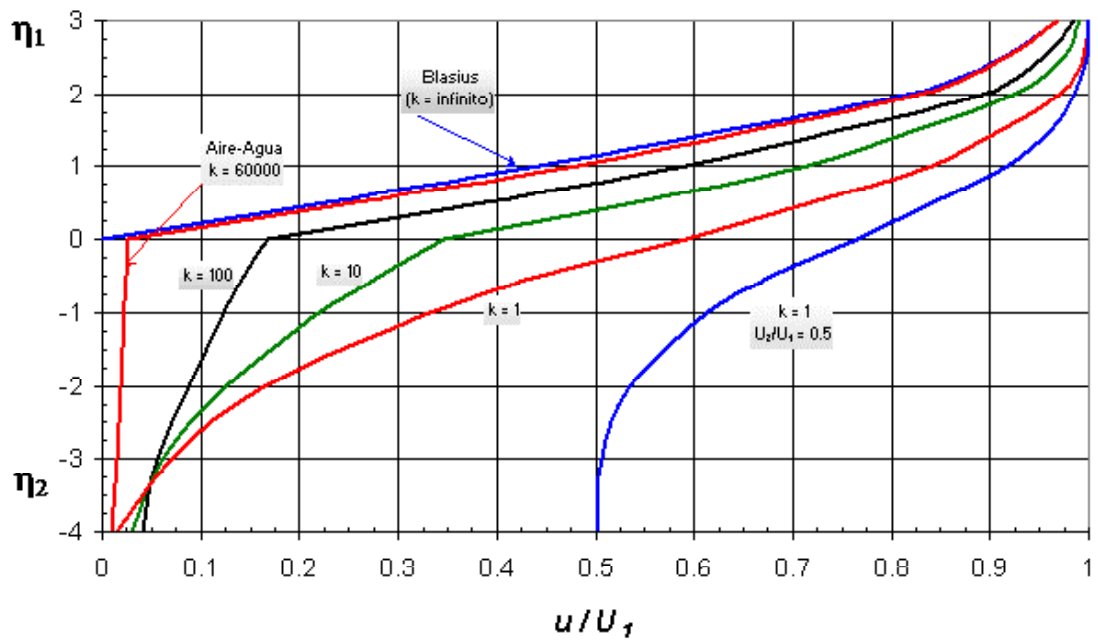


Figura 4.- Perfiles de velocidades para distintos valores de k . En todos los casos corresponden a $U_2/U_1 = 0$, salvo en el caso $k = 1$, donde se ha representado también $U_2/U_1 = 0.5$.

En la figura 5 se muestra la velocidad en la interfase, $u(0)$, en función de $1/\sqrt{k} = \sqrt{\rho_1\mu_1/\rho_2\mu_2}$ para $U_2 = 0$.

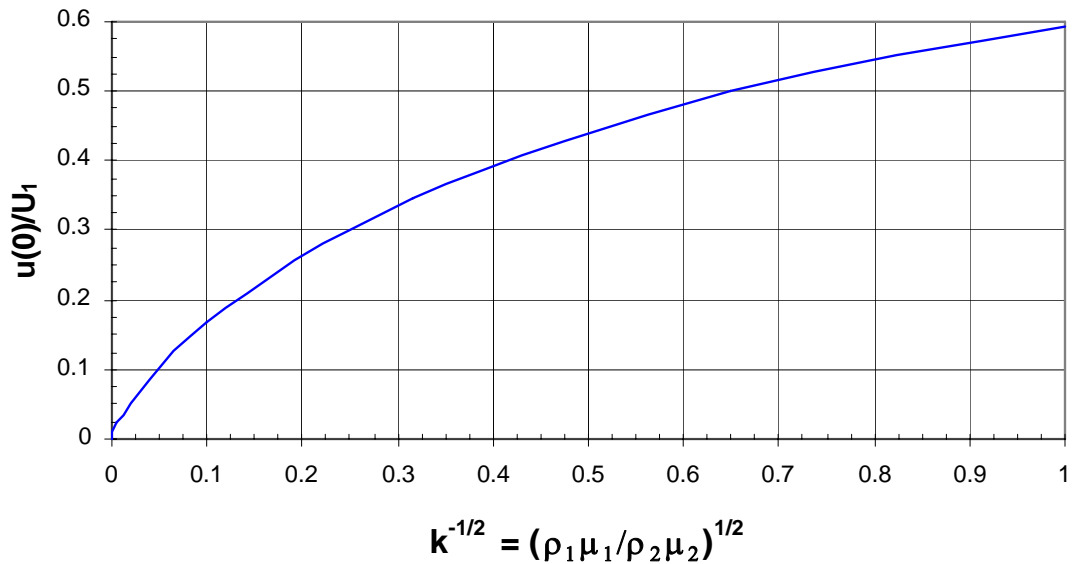


Figura 5.- Velocidad en la interfase $u(0)$ en función de $1/\sqrt{k}$, para $U_2 = 0$.