

# Capa límite laminar incompresible. Soluciones de semejanza

M. Rodríguez

## 1 Solución de Blasius (1908)

Las ecuaciones de la capa límite para una placa plana son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

a integrar con las condiciones

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y \rightarrow \infty : u = U.$$

Utilizando la función de corriente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

la ecuación de cantidad de movimiento toma la forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3},$$

que puede escribirse como

$$\frac{\partial (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial (y/\sqrt{\nu})} \frac{\partial^2 (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x \partial (y/\sqrt{\nu})} - \frac{\partial (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x} \frac{\partial^2 (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial (y/\sqrt{\nu})^2} = \frac{\partial^3 (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial (y/\sqrt{\nu})^3},$$

donde se observa, con ayuda de las condiciones de contorno, que la solución es tal que

$$\frac{\psi}{\sqrt{\nu}} = F \left( x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, U \right).$$

Utilizando el análisis dimensional se obtiene

$$\frac{\psi}{\sqrt{2\nu U x}} = f \left( \frac{y}{\sqrt{2\nu x/U}} \right),$$

donde el factor  $\sqrt{2}$  se ha introducido por conveniencia.

Con la solución de la forma indicada más arriba se tiene

$$\psi = \sqrt{2\nu U x} f(\eta) ; \quad u = U \frac{df}{d\eta} ; \quad v = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} - f \right) ; \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}},$$

y la ecuación a resolver es

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \text{ con las condiciones: } \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0} = f(0) = 0 \text{ y } \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta \rightarrow \infty} = 1.$$

La solución proporciona, junto con los valores  $f(\eta)$ , los valores numéricos

$$\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = 0.469600 \text{ y } \lim(\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty} = 1.21678 \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty,$$

lo que permite determinar

$$\begin{aligned} \frac{\delta^*}{x} &= \sqrt{\frac{2\nu}{Ux}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) d\eta = \frac{1.721}{\sqrt{Ux/\nu}}, \\ \frac{\delta^{**}}{x} &= \sqrt{\frac{2\nu}{Ux}} \int_0^\infty \left[\frac{df}{d\eta} \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right)\right] d\eta = \frac{0.664}{\sqrt{Ux/\nu}}, \\ \tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} &= \frac{\mu U}{\sqrt{2\nu x/U}} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}; \quad C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Ux/\nu}} \end{aligned}$$

### Solución de Blasius

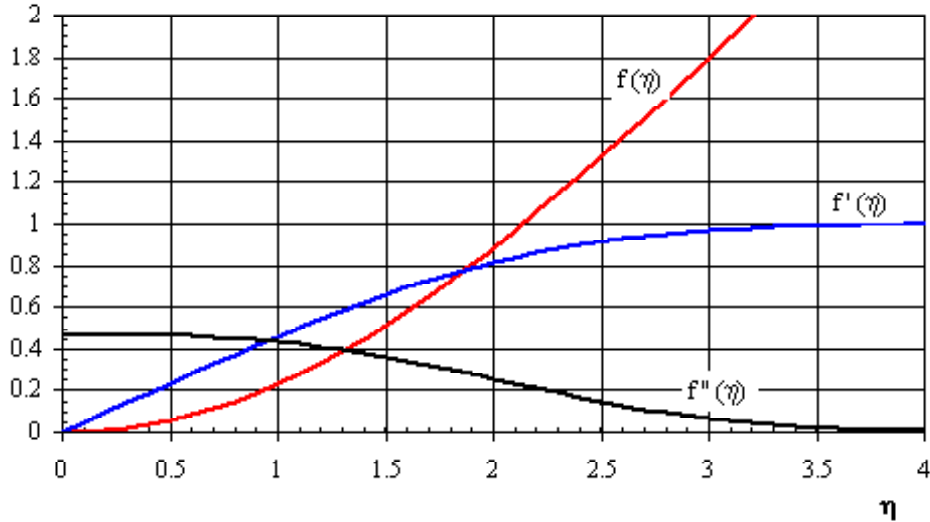


Figura 1.- Valores de las funciones  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  y  $f''(\eta)$  correspondientes a la solución de Blasius.

## 2 Ecuación de la energía

Cuando la temperatura de la placa es  $T_p$  constante y la de la corriente exterior  $T_\infty$ , también constante, la ecuación de la energía toma la forma (despreciando la disipación viscosa)

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + Pr f(\eta) \frac{d\theta}{d\eta} = 0, \text{ con las condiciones: } \theta(0) = 1 \text{ y } \theta(\infty) = 0,$$

donde

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad \text{y} \quad Pr = \frac{\mu c}{k},$$

y cuya solución es

$$\theta = \frac{\int_0^\infty \left\{ \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right) \right\} d\eta}{\int_0^\infty \left\{ \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right) \right\} d\eta}, \quad \text{con} \quad \left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = - \left[ \int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta \right]^{-1},$$

debida a Pohlhausen (1921).

El flujo de calor en la pared está dado por

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k (T_p - T_\infty) \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0},$$

que en forma adimensional es

$$Nu = \frac{q_p x}{k (T_p - T_\infty)} = -\sqrt{\frac{Ux}{2\nu}} \left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0},$$

donde  $Nu$  es el número de Nusselt.

Prandtl	$-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}$	Prandtl	$-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}$
0.001	0.0245	1	0.4696
0.01	0.0730	10	1.0297
0.03	0.1195	100	2.2231
0.1	0.1981	1000	4.7899
0.3	0.3037	10000	10.320

Tabla I.- Valores de  $(d\theta/d\eta)_{\eta=0}$  en función del número de Prandtl, que determinan el número de Nusselt.

En la tabla anterior se muestran los valores de  $(d\theta/d\eta)_{\eta=0}$  en función del número de Prandtl, y que determinan el número de Nusselt. En el rango de valores del número de Prandtl  $0.1 \leq Pr \leq 10000$ , los resultados numéricos pueden aproximarse por la relación

$$Nu \approx 0.332 Pr^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}.$$

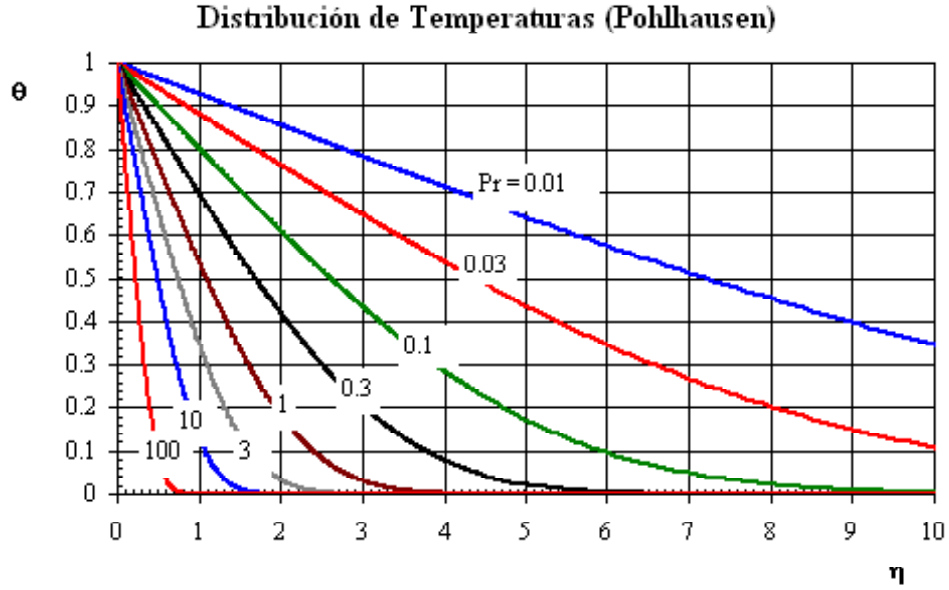


Figura 2.- Distribución de temperatura adimensional,  $\theta(\eta)$ , para distintos números de Prandtl.

### 3 Succión y soplado

La capa límite de una placa plana con succión o soplado sigue siendo autosemejante si la velocidad de succión/soplado es de la forma

$$(v)_{y=0} = v_w^* U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}},$$

donde  $v_w^*$  es el parámetro de succión o soplado constante.

De nuevo se tiene

$$\psi = \sqrt{2\nu Ux} f(\eta) ; \quad u = U \frac{df}{d\eta} ; \quad v = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} - f \right) ; \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}},$$

con la misma ecuación a resolver

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0,$$

pero con las condiciones

$$\left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=0} = 0, \quad f(0) = -\sqrt{2} v_w^* \quad \text{y} \quad \left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta \rightarrow \infty} = 1,$$

ya que ahora la velocidad  $(v)_{y=0} = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} - f \right)_{\eta=0} = -\sqrt{\frac{\nu U}{2x}} f(0)$ .

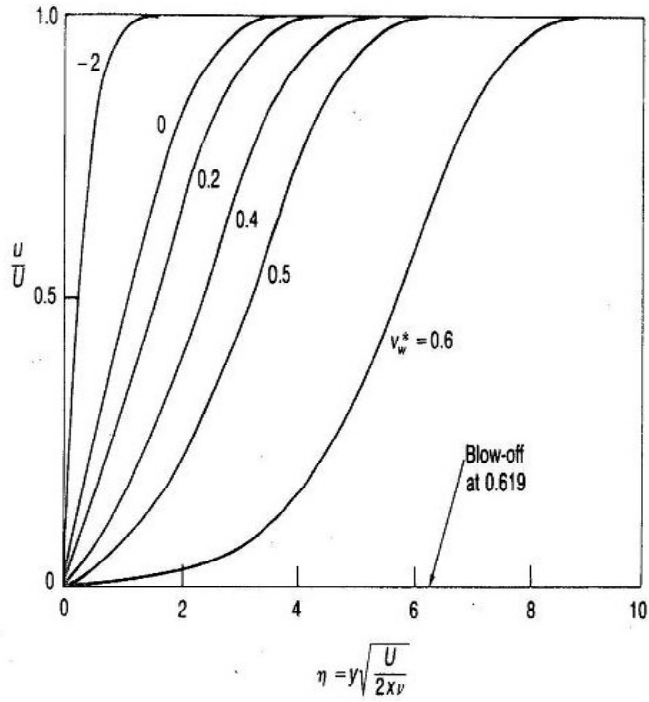


Figura 3a.- Distribución de velocidades en la capa límite de una placa plana con succión o soplado.

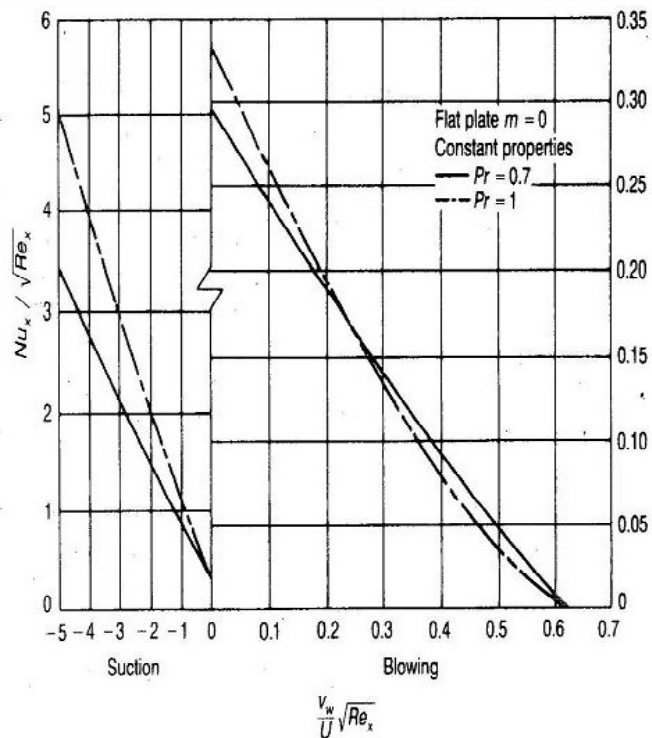


Figura 3b.- Número de Nusselt en función del parámetro de soplado para dos números de Prandtl. Capa límite en una placa plana con soplado o succión.

La integración numérica proporciona esfuerzo nulo en la placa,  $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$  cuando el

parámetro de soplado es  $v_w^* = 0.619$ . En las figuras 3a se da la distribución de velocidades  $u/U = f(\eta)$  para distintos valores de  $v_w^*$  y en la figura 3b se da el número de Nusselt en función del parámetro de soplado, para dos números de Prandtl diferentes.

## 4 Soluciones de Falkner-Skan

Existe solución de semejanza cuando la corriente exterior es de la forma

$$U(x) = Ax^m,$$

donde  $A$  y  $m$  son constantes. En este caso se tiene

$$\frac{\psi}{\sqrt{\nu}} = F\left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, A, m\right),$$

de modo que

$$\frac{\psi}{\sqrt{\frac{2\nu Ax^{m+1}}{m+1}}} = f(\eta), \quad \text{con } \eta = y\sqrt{\frac{(m+1)Ax^{m-1}}{2\nu}}.$$

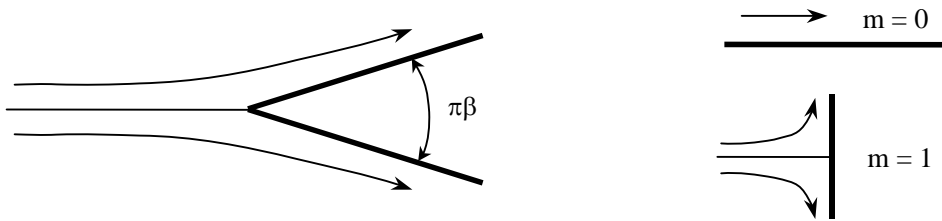
La ecuación a resolver es ahora

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta \left[ 1 - \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] = 0, \quad \text{con } f(0) = \left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta \rightarrow \infty} = 1.$$

El signo de la constante  $\beta = 2m/(m+1)$  coincide con el de  $dp/dx$ . Cuando  $m = 0$  ( $\beta = 0$ ) se tiene el caso analizado previamente de la placa plana y cuando  $m = 1$  ( $\beta = 1$ ) se tiene el caso de la corriente en torno al punto de remanso. La separación ocurre cuando  $m = -0.09043$ .

La corriente exterior  $U(x) = Ax^m$  representa el movimiento irrotacional alrededor de una cuña de ángulo

$$\pi\beta = \pi \frac{2m}{m+1}.$$



Cuando  $0 \leq m \leq \infty$  se tiene  $0 \leq \beta \leq 2$ ; y el gradiente de presión es favorable, ya que para que  $\psi$  sea real se necesita que  $A > 0$ . Cuando  $-1 \leq m \leq 0$  se tiene  $-\infty \leq \beta \leq 0$  y el gradiente de presión es adverso, pero no existe solución para  $\beta = -0.1988$  que corresponde al desprendimiento ( $m = -0.09043$ ).

El esfuerzo en la pared está dado por

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho U^2(x) \sqrt{\frac{\nu(m+1)}{2xU(x)}} f''(0, \beta),$$

y el coeficiente de fricción por

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2(x)} = \sqrt{\frac{2\nu(m+1)}{xU(x)}} f''(0, \beta) = \sqrt{\frac{4\nu}{(2-\beta)xU(x)}} f''(0, \beta).$$

El espesor de desplazamiento es

$$\delta^* = \sqrt{\frac{(2-\beta)\nu x}{U(x)}} \lim(\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty},$$

y el de cantidad de movimiento

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{(2-\beta)\nu x}{U(x)}} \left\{ \frac{f''(0, \beta) - \beta \lim(\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty}}{1 + \beta} \right\}.$$

En la figura 4 se muestra  $\frac{df}{d\eta}$ , para determinar el perfil de velocidades, y  $\frac{d^2f}{d\eta^2}$ , para determinar el esfuerzo viscoso, en función de la variable de semejanza,  $\eta$ , para diferentes valores del parámetro  $\beta$ .

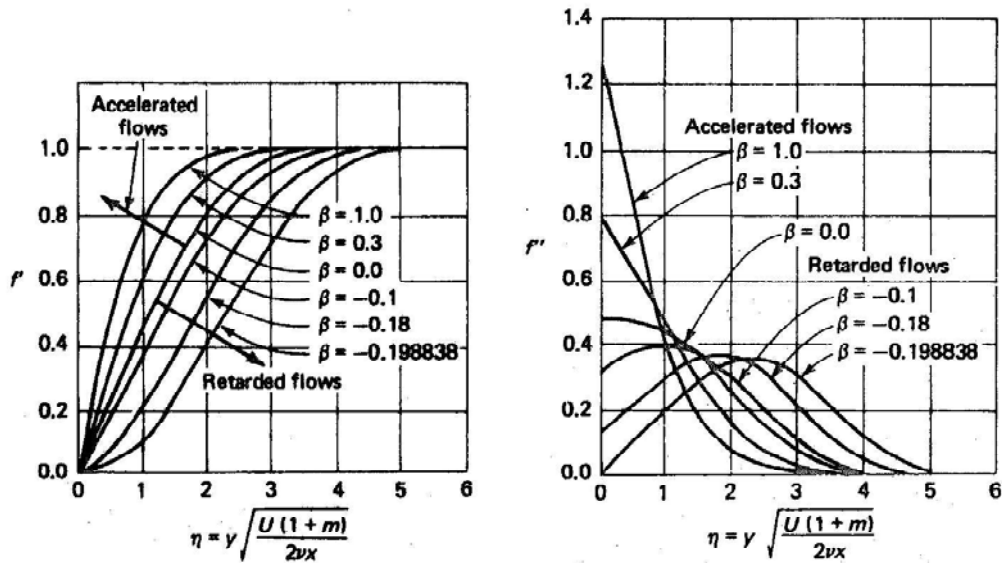


Figura 4.- Funciones  $f'(\eta, \beta)$  y  $f''(\eta, \beta)$ , correspondientes a las soluciones de Falkner-Skan.

En la tabla II se dan los valores de  $(d^2f/d\eta^2)_{\eta=0}$  y  $\lim(\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty}$  en función de  $\beta$ , que son necesarios para determinación del coeficiente de fricción y los espesores de desplazamiento y cantidad de movimiento. Estos valores están también representados en la figura 5.

$\beta$	$(d^2 f/d\eta^2)_{\eta=0}$	$\lim (\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty}$
-0.1988	0	2.3587
-0.15	0.2166	1.6467
-0.05	0.4004	1.3125
0	0.4696	1.2169
0.05	0.5312	1.1418
0.1	0.5871	1.0803
0.2	0.6868	0.9840
0.4	0.8545	0.8527
0.6	0.9959	0.7641
0.8	1.1203	0.6988
1	1.2326	0.6481
1.25	1.3603	0.5980
1.5	1.4772	0.5582
1.75	1.5857	0.5253
2	1.6872	0.4978

Tabla II.- Valores de  $f''(0, \beta)$  y de  $\lim (\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty}$  en función de  $\beta$ .

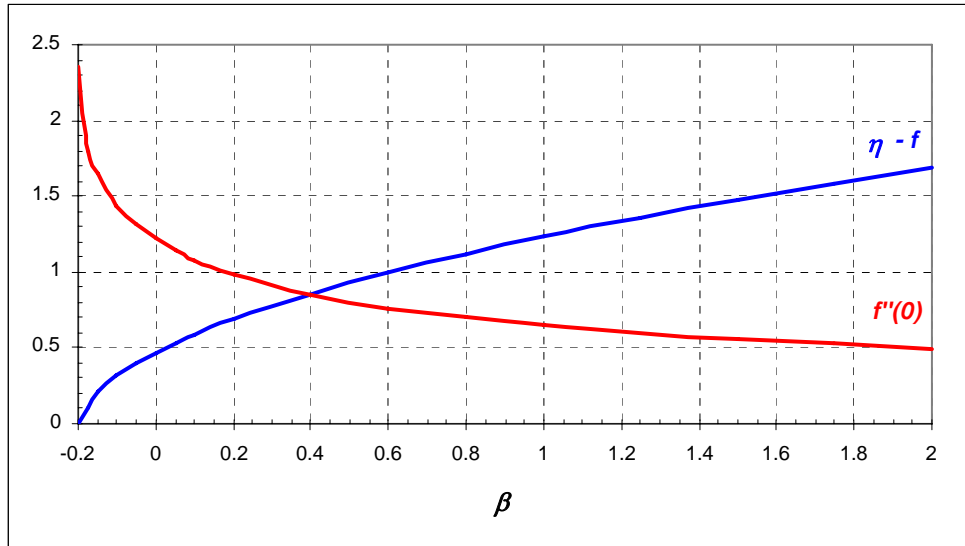


Figura 5.- Valores de  $(d^2 f/d\eta^2)_{\eta=0}$  y de  $\lim (\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty}$  como función de  $\beta$ .

La ecuación de la energía es la misma que se tiene en la placa plana

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + Pr f(\eta) \frac{d\theta}{d\eta} = 0, \text{ con las condiciones: } \theta(0) = 1 \text{ y } \theta(\infty) = 0,$$

pero ahora el número de Nusselt está dado por

$$Nu = G(Pr, \beta) \sqrt{\frac{(m+1)xU(x)}{\nu}}, \text{ siendo } G(Pr, \beta) = \left[ \int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta \right]^{-1},$$

pero también puede escribirse en la forma

$$Nu = \frac{q_p x}{k(T_p - T_\infty)} = -\sqrt{\frac{xU(x)}{\nu(2-\beta)}} \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0}.$$



En las tablas IIIa y IIIb se dan los valores de  $-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}$  en función de  $\beta$ , para distintos valores del número de Prandtl. Estos resultados son útiles para determinar el flujo de calor. Los valores de las tablas se dan también en las figuras 6a y 6b.

$\beta$	Pr = 0.05	Pr = 0.1	Pr = 0.3	Pr = 0.6	Pr = 0.72
-0.1988	0.1279	0.1634	0.2318	0.2832	0.2979
-0.15	0.1404	0.1840	0.2739	0.3464	0.3679
-0.1	0.1442	0.1905	0.2876	0.3671	0.3908
-0.05	0.1468	0.1948	0.2968	0.3811	0.4063
0	0.1487	0.1981	0.3037	0.3917	0.4181
0.05	0.1502	0.2007	0.3094	0.4004	0.4278
0.1	0.1515	0.2029	0.3142	0.4077	0.4359
0.2	0.1535	0.2064	0.3218	0.4196	0.4491
0.4	0.1564	0.2114	0.3328	0.4368	0.4683
0.6	0.1583	0.2148	0.3407	0.4491	0.4821
0.8	0.1598	0.2175	0.3467	0.4586	0.4928
1	0.1610	0.2196	0.3515	0.4664	0.5015
1.25	0.1622	0.2217	0.3564	0.4743	0.5104
1.5	0.1632	0.2234	0.3605	0.4809	0.5178
1.75	0.1639	0.2248	0.3639	0.4865	0.5242
2	0.1646	0.2261	0.3669	0.4914	0.5296

Tabla IIIa.- Valores de  $(-d\theta/d\eta)_{\eta=0}$  en función de  $\beta$  y del número de Prandtl.

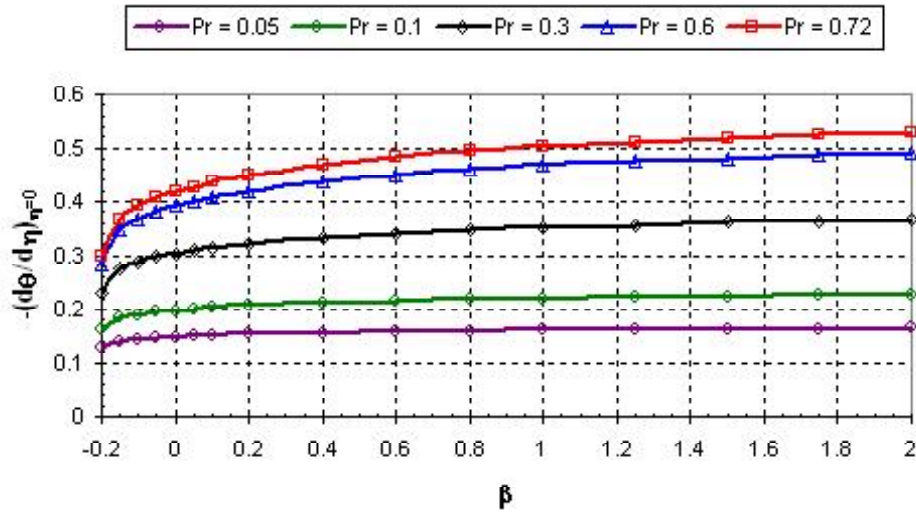


Figura 6a.- Valores de  $-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}$  en función de  $\beta$ , para diferentes valores del número de Prandtl.

$\beta$	Pr = 1	Pr = 3	Pr = 5	Pr = 8	Pr = 15
-0.1988	0.3252	0.4348	0.4955	0.5582	0.6540
-0.15	0.4095	0.5816	0.6835	0.7930	0.9680
-0.1	0.4369	0.6291	0.7438	0.8672	1.0649
-0.05	0.4554	0.6613	0.7844	0.9172	1.1299
0	0.4696	0.6860	0.8156	0.9555	1.1796
0.05	0.4812	0.7062	0.8411	0.9868	1.2203
0.1	0.4910	0.7233	0.8627	1.0132	1.2546
0.2	0.5069	0.7512	0.8980	1.0566	1.3110
0.4	0.5301	0.7922	0.9500	1.1206	1.3943
0.6	0.5468	0.8222	0.9882	1.1677	1.4559
0.8	0.5599	0.8458	1.0184	1.2052	1.5049
1	0.5705	0.8653	1.0435	1.2363	1.5457
1.25	0.5815	0.8872	1.0697	1.2689	1.5888
1.5	0.5906	0.9027	1.0918	1.2966	1.6254
1.75	0.5984	0.9175	1.1110	1.3206	1.6573
2	0.6052	0.9304	1.1279	1.3419	1.6856

Tabla IIIb.- Valores de  $(-d\theta/d\eta)_{\eta=0}$  en función de  $\beta$  y del número de Prandtl.

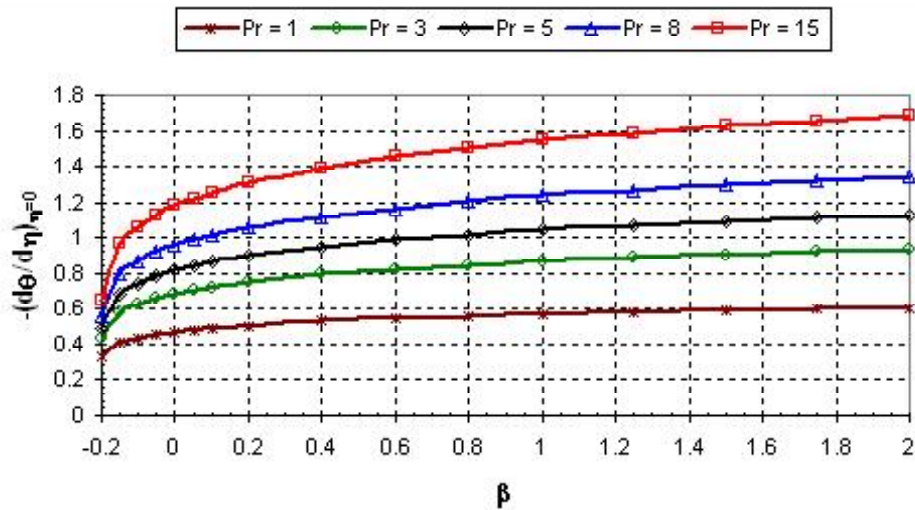


Figura 6b.- Valores de  $-(\frac{d\theta}{d\eta})_{\eta=0}$  en función de  $\beta$ , para diferentes valores del número de Prandtl.