
Métodos integrales en la teoría de la capa límite¹

1.- Introducción

Las ecuaciones de la capa límite integradas en la dirección normal a la pared da lugar a ecuaciones diferenciales ordinarias respecto a la variable x . Estas ecuaciones son las ecuaciones integrales de la capa límite. En ellas aparecen integrales respecto a la variable y de las magnitudes fluidas y combinaciones de ellas. Para determinar estas integrales deberíamos sustituir en ellas las verdaderas distribuciones de las magnitudes fluidas en la capa límite, y en ese caso las ecuaciones integrales se satisfarían exactamente.

Si nos contentamos con una solución aproximada de las ecuaciones, podemos elegir para las magnitudes fluidas funciones determinadas respecto a y en las que aparecen un número de funciones arbitrarias de x , tanto mayor cuanto mayor sea la aproximación que se desea obtener. Para determinar de estas funciones se dispone de las ecuaciones en forma integral junto con las condiciones de contorno que las magnitudes fluidas deben cumplir en la pared y fuera de la capa límite. Estas condiciones pueden no ser suficientes por lo que también se dispone de las condiciones adicionales obtenidas de obligar a que se cumplan las ecuaciones diferenciales y las obtenidas al derivar estas con respecto a y en la pared y en el infinito. Muy a menudo se supone que para una y finita $y = h(x)$ ya se alcanza la velocidad exterior. En este caso $h(x)$ es una de las funciones que determinan $u(x, y)$

2.- Ecuaciones integrales para una capa límite bidimensional estacionaria y compresible

Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía para el movimiento estacionario bidimensional y compresible de una capa límite son las dadas a continuación,

$$\frac{\int (\rho u)}{\int x} + \frac{\int (\rho v)}{\int y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\int (\rho u u)}{\int x} + \frac{\int (\rho v u)}{\int y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\int}{\int y} \left(m \frac{\int u}{\int y} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\int (\rho u h_o)}{\int x} + \frac{\int (\rho v h_o)}{\int y} = \frac{\int}{\int y} \left(k \frac{\int T}{\int y} \right) + \frac{\int}{\int y} \left(m u \frac{\int u}{\int y} \right). \quad (3)$$

En la ecuación de la cantidad de movimiento se ha sustituido el gradiente de presiones por su equivalente $\rho_e u_e (du_e/dx) = -dp_e/dx = -\int p/\int x$.

¹ La mayor parte de este capítulo fue escrito originalmente por el Profesor y Académico D. Gregorio Millán Barbani.

Si integramos transversalmente la ecuación (1) tenemos,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u dy + (rv)_{\infty} - (rv)_0 = 0, \quad (4.1)$$

y dado que $v = 0$ en $y = 0$, la ecuación anterior toma la forma,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u dy = - (rv)_{\infty}, \quad (4.2)$$

que representa la masa de fluido que está entrando en la capa límite.

Haciendo lo mismo con la ecuación (2) de la cantidad de movimiento se tiene,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u u dy + (rvu)_{\infty} - (rvu)_0 = \int_0^{\infty} r_e u_e \frac{du_e}{dx} dy + \left(\frac{m \tau u}{\tau y} \right)_{\infty} - \left(\frac{m \tau u}{\tau y} \right)_0, \quad (5.1)$$

en donde $(rvu)_0 = 0$ por ser nula la velocidad en la pared y $\left[\frac{m \tau u}{\tau y} \right]_{\infty} = 0$ por ser despreciables los efectos viscosos fuera de la capa límite. El término $\left[\frac{m \tau u}{\tau y} \right]_0 = t_p$ representa el esfuerzo en la pared y el término $(rvu)_{\infty} = u_e (rv)_{\infty}$, que de acuerdo con la ecuación (4.2) toma la forma,

$$u_e (rv)_{\infty} = -u_e \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u dy, \quad (5.2)$$

que también puede escribirse como,

$$u_e (rv)_{\infty} = -u_e \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u dy = -\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u u_e dy + \left(\frac{du_e}{dx} \right) \int_0^{\infty} r u dy. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, sustituyendo (5.3) en (5.1) se tiene,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u (u - u_e) dy + \left(\frac{du_e}{dx} \right) \int_0^{\infty} (r u - r_e u_e) dy = -t_p. \quad (5.4)$$

Teniendo en cuenta que el espesor de desplazamiento d^* y el de cantidad de movimiento q están dados por,

$$d^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{r u}{r_e u_e} \right) dy; \quad q = \int_0^{\infty} \frac{r u}{r_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy, \quad (6)$$

la ecuación (5.4) toma la forma,

$$\frac{d}{dx} (r_e u_e^2 q) + r_e u_e d^* \frac{du_e}{dx} = t_p. \quad (7.1)$$

La ecuación anterior puede escribirse en la forma alternativa,

$$\frac{dq}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} q (2 + H) + \frac{q}{r_e} \frac{dr_e}{dx} = \frac{1}{2} C_f, \quad (7.2)$$

donde $h = \mathbf{d}^* / \mathbf{q}$ es el denominado factor de forma y $C_f = 2 \mathbf{t}_p / \mathbf{r}_e u_e^2$ es el coeficiente de fricción. Otra forma alternativa de la ecuación (7.2) es,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \mathbf{q} (2 - M_e^2 + H) = \frac{1}{2} C_f, \quad (7.3)$$

donde M_e es el número de Mach de la corriente exterior. Para la obtención de (7.3) debe tenerse en cuenta que,

$$\frac{u_e^2 (d\mathbf{r}_e/dx)}{\mathbf{r}_e u_e (du_e/dx)} = - \frac{u_e^2 (d\mathbf{r}_e/dx)}{dp_e/dx} = - \frac{u_e^2}{dp_e/d\mathbf{r}_e} = - M_e^2.$$

Las formas de la ecuación de cantidad de movimiento dadas en (7) son la denominada ecuación integral de Kármán.

Procediendo con la ecuación de la energía en modo análogo al de la de cantidad de movimiento se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \mathbf{r} u h_o dy + (\mathbf{r} v h_o)_\infty = q_p, \quad (8.1)$$

donde $q_p = -[k(\nabla T/\nabla y)]_{y=0}$ es el flujo de calor en la pared. El término $\mathbf{m} u (\nabla u/\nabla y)$ en la pared es cero porque la velocidad es nula allí, y en el infinito también es cero porque los efectos viscosos son despreciables. Por último, el término,

$$(\mathbf{r} v h_o)_\infty = h_{oe} (\mathbf{r} v)_\infty = - h_{oe} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \mathbf{r} u dy = - \frac{d}{dx} \int_0^\infty \mathbf{r} u h_{oe} dy, \quad (8.2)$$

ya que fuera de la capa límite, la ecuación de la energía proporciona $dh_{oe}/dx = 0$. Sustituyendo el valor de (8.2) en (8.1) se obtiene la forma integral de la ecuación de la energía,

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \mathbf{r} u (h_o - h_{oe}) dy = q_p. \quad (8.3)$$

La ecuación (8.3) también puede escribirse en la forma,

$$\frac{d\mathbf{D}}{dx} + \mathbf{D} \left[\frac{dh_p/dx}{h_p - h_{oe}} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (1 - M_e^2) \right] = S_t, \quad (8.4)$$

donde,

$$\mathbf{D} = \int_0^\infty \frac{\mathbf{r} u}{\mathbf{r}_e u_e} \left[1 - \frac{h_o - h_p}{h_{oe} - h_p} \right] dy, \quad (9)$$

h_p la entalpía a la temperatura de la pared y S_t el número de Stanton, definido ya con anterioridad en la forma,

$$S_t = \frac{q_p}{\mathbf{r}_e u_e (h_p - h_{oe})}. \quad (10)$$

3.- Solución de la ecuación integral de Kármán

En lo que sigue nos limitaremos a movimientos laminares estacionarios de fluidos incompresibles, con lo cual la ecuación a resolver es la (7.3) con $M_e = 0$,

$$\frac{dq}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} q (2+H) = \frac{1}{2} C_f. \quad (11)$$

Para determinar los espesores y coeficiente de fricción es necesario suponer unos perfiles de velocidades, que no son arbitrarios ya que deben cumplir una serie de condiciones obtenidas de las de contorno y de las ecuaciones diferenciales particularizadas en la pared y en el borde exterior de la capa límite. Así, la función aproximada $u(x,y)$ debe cumplir, en $y=0$, las condición de adherencia,

$$u(x,0) = 0; \quad (12.1)$$

junto con la condición obtenida de hacer que se cumpla la ecuación diferencial en la pared,

$$n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -u_e \frac{du_e}{dx}; \quad (12.2)$$

que tiene en cuenta el gradiente externo de presiones. Además, derivando sucesivamente con respecto a y la ecuación de cantidad de movimiento y particularizándola en $y=0$ se obtiene,

$$n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0; \quad (12.3)$$

$$n \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{y=0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{y=0}; \quad (12.4)$$

.....

Por otro lado, en el borde de la capa límite [$y = h(x)$] la velocidad debe coincidir con la de la exterior y los efectos viscosos deben ser despreciables, es decir,

$$u(x,h) = u_e; \quad (13.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=h} = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=h} = \dots = \left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n} \right)_{y=h} = 0. \quad (13.2)$$

El perfil de velocidades se elige de la forma,

$$u(x,y) = u_e(x) \text{ para } y > h(x); \quad (14.1)$$

$$u(x,y)/u_e(x) = f(\mathbf{h}) \text{ para } y \leq h(x), \quad (14.2)$$

donde $\mathbf{h} = y/h(x)$ siendo h una de las funciones de x a determinar. Esta función de x , junto con las que aparecen en la definición de la función $f(\mathbf{h})$, se determinan mediante la ecuación diferencial (11), las definiciones de los espesores de

desplazamiento, d^* , y cantidad de movimiento, q , dados en por las ecuaciones (6) y con las condiciones (12) y (13) que sean necesarias.

3.1- Método de Pohlhausen

En el método de Pohlhausen se elige una cuártica para $f(\mathbf{h})$, haciendo que se cumplan las condiciones (12.1) y (12.2) en $y=0$, junto con la condición (13.1) y las dos primeras de las condiciones (13.2) en $y=h(x)$, esto proporciona,

$$f(\mathbf{h}) = f_1(\mathbf{h}) + L f_2(\mathbf{h}), \quad (15.1)$$

con

$$f_1(\mathbf{h}) = 2\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^3 + \mathbf{h}^4 ; \quad f_2(\mathbf{h}) = \frac{1}{6}\mathbf{h}(1-\mathbf{h})^3, \quad (15.2)$$

siendo L un parámetro proporcional al gradiente de presiones,

$$L = \frac{h^2}{n} \frac{du_e}{dx}. \quad (15.3)$$

Obsérvese que L es un parámetro que mide la relación entre el tiempo de difusión a través de la capa límite, h^2/n , y el tiempo que es necesario esperar para que la velocidad de una partícula cambie como consecuencia del gradiente de presiones, $1/(du_e/dx)$.

Placa plana a ángulo de ataque nulo

Si suponemos nulo el gradiente de presiones (capa límite sobre una placa plana) se tiene $L=0$, de modo que,

$$u/u_e = f(\mathbf{h}) = f_1(\mathbf{h}) = 2\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^3 + \mathbf{h}^4, \quad (16)$$

y por lo tanto el espesor de desplazamiento se reduce a,

$$d^* = h \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\mathbf{h} = h \int_0^1 (1 - 2\mathbf{h} + 2\mathbf{h}^3 - \mathbf{h}^4) d\mathbf{h} = \frac{3}{10}, \quad (17.1)$$

mientras que el de cantidad de movimiento queda,

$$\begin{aligned} q &= h \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\mathbf{h} = \\ &= h \int_0^1 (2\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^3 + \mathbf{h}^4)(1 - 2\mathbf{h} + 2\mathbf{h}^3 - \mathbf{h}^4) d\mathbf{h} = \frac{37}{315}, \end{aligned} \quad (17.2)$$

A su vez, el coeficiente de fricción toma la forma,

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{2n}{h u_e}, \quad (18)$$

y por lo tanto, la ecuación (11) toma la forma,

$$\frac{37}{315} \frac{dh}{dx} = \frac{2n}{h u_e}, \quad (19)$$

ya que al ser el gradiente de presiones nulo, u_e es constante.

La integración de la ecuación anterior, con la condición $h = 0$ en $x = 0$ (la capa límite se inicia en el borde de la placa) proporciona,

$$h = \sqrt{\frac{1260 \mathbf{n} x}{37 u_e}} = 5.8356 \cdot x \sqrt{\frac{\mathbf{n}}{u_e x}}, \quad (20)$$

o bien,

$$\frac{h}{x} = \frac{5.8356}{\sqrt{Re_x}}, \quad (21)$$

donde $Re_x = u_e x / \mathbf{n}$ es el número de Reynolds basado en la velocidad exterior y la distancia x .

Una vez que se conoce h/x , se determinan los espesores de desplazamiento [ecuación (17.1)] y cantidad de movimiento [ecuación (17.2)], así como el coeficiente de fricción [ecuación (18)], obteniéndose,

$$\frac{d^*}{x} = \frac{3}{10} \frac{h}{x} = \frac{1.751}{\sqrt{Re_x}}, \quad (22.1)$$

$$\frac{q}{x} = \frac{37}{315} \frac{h}{x} = \frac{0.685}{\sqrt{Re_x}}, \quad (22.2)$$

$$C_f = \frac{0.685}{\sqrt{Re_x}}. \quad (22.3)$$

Si se comparan estos resultados con los obtenidos mediante la solución exacta de Blasius el error es del orden del 3%².

Capa límite con gradiente de presiones

Cuando el gradiente de presiones no es nulo, $L \neq 0$, conviene multiplicar la ecuación (11) por $u_e \mathbf{q} / \mathbf{n}$, de modo que puede reescribirse en la forma,

$$u_e \frac{d(I/u_e')}{dx} = F(I) \equiv 2[T - I(2 + H)], \quad (23)$$

donde,

$$I = \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{n}} \frac{du_e}{dx} = L \left(\frac{\mathbf{q}}{h} \right)^2 = L \left(\frac{37}{315} - \frac{L}{945} - \frac{L^2}{9072} \right)^2, \quad (24.1)$$

y las funciones $T(I)$ y $H(I)$ están dadas por,

$$T(I) = \frac{u_e \mathbf{q} C_f}{2\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{q}}{h} \left(2 + \frac{L}{6} \right) = \left(2 + \frac{L}{6} \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{L}{945} - \frac{L^2}{9072} \right), \quad (24.2)$$

² La solución de Blasius proporciona: $d^*/x = 1.721/\sqrt{Re_x}$; $C_f = \mathbf{q}/x = 0.664/\sqrt{Re_x}$.

$$H(I) = \frac{d^*}{q} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{L}{120}}{\frac{37}{315} - \frac{L}{945} - \frac{L^2}{9072}}. \quad (24.3)$$

Estas funciones están dadas en la Tabla I a continuación.

I	$L(I)$	$T(I)$	$H(I)$	$F(I)$	I	$L(I)$	$T(I)$	$H(I)$	$F(I)$
0.0948	12.000	0.3556	2.2500	-0.0948	0.0000	0.000	0.2349	2.5541	0.4698
0.0941	11.000	0.3545	2.2527	-0.0912	-0.0140	-1.000	0.2171	2.6040	0.5633
0.0919	10.000	0.3515	2.2603	-0.0800	-0.0284	-2.000	0.1986	2.6580	0.6616
0.0882	9.000	0.3465	2.2725	-0.0608	-0.0429	-3.000	0.1795	2.7164	0.7640
0.0831	8.000	0.3398	2.2889	-0.0335	-0.0575	-4.000	0.1599	2.7794	0.8698
0.0770	7.052	0.3319	2.3081	0.0000	-0.0720	-5.000	0.1400	2.8473	0.9780
0.0767	7.000	0.3314	2.3092	0.0021	-0.0862	-6.000	0.1198	2.9205	1.0877
0.0689	6.000	0.3214	2.3333	0.0459	-0.0999	-7.000	0.0996	2.9994	1.1981
0.0599	5.000	0.3100	2.3611	0.0979	-0.1130	-8.000	0.0792	3.0846	1.3080
0.0497	4.000	0.2972	2.3924	0.1579	-0.1254	-9.000	0.0590	3.1765	1.4167
0.0385	3.000	0.2832	2.4273	0.2255	-0.1369	-10.000	0.0390	3.2758	1.5229
0.0264	2.000	0.2681	2.4658	0.3004	-0.1474	-11.000	0.0193	3.3834	1.6257
0.0135	1.000	0.2520	2.5081	0.3820	-0.1567	-12.000	0.0000	3.5000	1.7241

Tabla I.- Funciones $L(I)$, $T(I)$, $H(I)$ y $F(I)$ de la solución de Polhausen.

Obsérvese que el espesor de cantidad de movimiento está dado por,

$$\frac{q}{h} = \int_0^1 (f_1 + L f_2)(1 - f_1 - L f_2) dh = \frac{37}{315} - \frac{L}{945} - \frac{L^2}{9072}, \quad (25.1)$$

y el de desplazamiento por,

$$\frac{d^*}{h} = \int_0^1 (1 - f_1 - L f_2) dh = \frac{3}{10} - \frac{L}{120}. \quad (25.2)$$

Téngase en cuenta que el coeficiente de fricción,

$$C_f = \frac{2n}{u_e^2} \left(\frac{f u}{f y} \right)_{y=0} = \frac{2n}{h u_e} \left(2 + \frac{L}{6} \right), \quad (26)$$

se anula cuando $L = -12$ ($I = -0.1567$), que es el valor correspondiente al desprendimiento de la capa límite. Además puede escribirse en la forma,

$$\frac{C_f q u_e}{2n} = \frac{q}{h} \left(2 + \frac{L}{6} \right) = \left(2 + \frac{L}{6} \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{L}{945} - \frac{L^2}{9072} \right), \quad (27)$$

La ecuación (23) necesita una condición inicial, que puede ser el valor de h , d^* , q o L en el punto inicial de integración. Si hay un punto de remanso, $u_e = 0$, donde u_e' sea finita, la ecuación (23) nos indica que para tener derivada finita de q en este punto, es necesario que $F(I) = 0$, lo que implica $I = 0.077$ ($L = 7.052$), y como consecuencia de ello el espesor de cantidad de movimiento en el punto de remanso es,

$$q_{\text{punto remanso}} = \sqrt{\frac{0.077 n}{(du_e/dx)_{\text{punto remanso}}}},$$

y de acuerdo con (27), el coeficiente de fricción en el punto de remanso es,

$$\left(\frac{C_f q u_e}{2n} \right)_{\text{punto de remanso}} = 0.332 ,$$

A veces la solución es multiforme; en ese caso, sólo la solución correspondiente a $-12 \leq L \leq 12$ (o bien $-0.1567 \leq I \leq 0.0948$) es físicamente correcta. El límite inferior corresponde al desprendimiento, como ya se vio anteriormente, mientras que por encima del superior, en algún punto interior a la capa límite la velocidad es superior a la exterior ("velocity overshoot"), lo que no tiene sentido en capas límites incompresibles.

3.2.- Método de Thwaites-Loitsianskii

De acuerdo con el método de Pohlhausen la función $F(I)$ es sólo función del parámetro I , pero esto depende del grado elegido en el polinomio que determina el perfil de velocidades, ya que si se elige un polinomio de mayor orden aparecería una dependencia adicional con x . Para comprobar esto Thwaites representó el valor de F en función de I para todas las soluciones exactas numéricas o analíticas, de las ecuaciones de la capa límite. Como era de esperar, encontró que todos los puntos conocidos caían muy aproximadamente en la misma curva. Pero, además, encontró que $F(I)$ era, muy aproximadamente, una recta,

$$F(I) = a - bI , \quad (28)$$

donde $a = 0.45$ y $b = 6$.

Con $F(I) = a - bI$ la ecuación (23) toma la forma,

$$u_e \frac{d(I/u_e')}{dx} = a - bI , \quad (29)$$

y puede integrarse para darnos,

$$I = \frac{q^2 (du_e/dx)}{n} = a \frac{du_e}{dx} u_e^{-b} \left(\int_{x_0}^x u_e^{b-1} dx + C \right) . \quad (30)$$

Si x_0 es un punto de remanso, la constante C debe ser cero para evitar un espesor de cantidad de movimiento infinito en el punto de remanso. Si en $x = x_0$ es $q = 0$ ($u_e \neq 0$), la constante C también es nula. Por lo tanto, Thwaites mostró que $q(x)$ se puede predecir con mucha aproximación ($\pm 3\%$), para todas las capa límites laminares, mediante la expresión,

I	$F(I)$	$H(I)$	$T(I)$
0.250	-1.050	2.000	0.500
0.140	-0.390	2.180	0.404
0.100	-0.150	2.280	0.360
0.080	-0.030	2.340	0.333
0.075	0.000	2.356	0.327
0.064	0.066	2.390	0.313
0.000	0.450	2.610	0.220
-0.040	0.690	2.810	0.150
-0.070	0.870	3.210	0.085
-0.080	0.930	3.540	0.040
-0.082	0.942	3.700	0.000

Tabla II- Funciones $F(I)$, $H(I)$ y $T(I)$ tabuladas por Thwaites

$$q^2 = \frac{0.45n}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 dx. \quad (31)$$

Una vez que de (31) se conoce q , de (30) se obtiene I , es decir,

$$I = \frac{q^2 (du_e/dx)}{n}, \quad (32)$$

y con I conocido, de las tabulaciones de las funciones $H(I)$ y $T(I)$ (Tabla II), se obtiene $d^* = qH(I)$ y $C_f = (2n/u_e q) T(I)$. El punto de desprendimiento según el método de Thwaites viene

dado por $I = -0.082$, que corresponde a $T(I) = 0$. Este método predice el desprendimiento con una precisión mucho mayor que el de Pohlhausen.

En la figura 1 se dan la relación $L(I)$ correspondiente a la solución de Pohlhausen, y en la figura 2 se dan las funciones $T(I)$, $H(I)$ y $F(I)$ correspondientes a las soluciones de Pohlhausen y de Thwaites.

$L(I)$ Solución de Pohlhausen

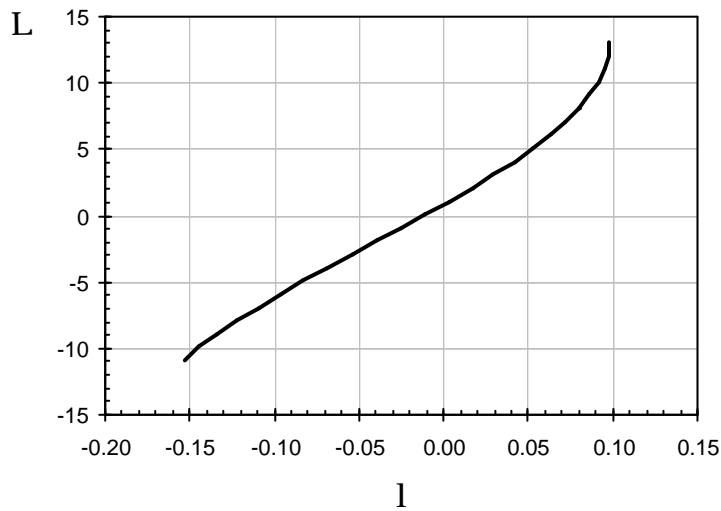


Figura 1.- Función $L(I)$ en la solución de Pohlhausen.

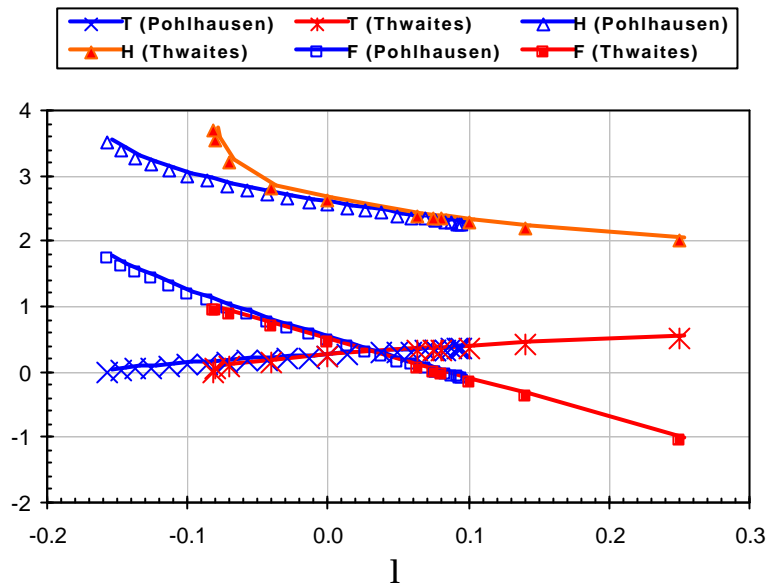


Figura 2.- Funciones $T(I)$, $H(I)$ y $F(I)$ en las soluciones de Pohlhausen y Thwaites

Loitsianskii, por un método diferente encontró,

$$I = \frac{q^2 (du_e/dx)}{n} = 0.44 \frac{du_e}{dx} u_e^{-5.5} \int_0^x u_e^{4.5} dx, \quad (33)$$

utilizando las correlaciones,

$$\begin{aligned} T(I) &= 0.22 + 1.85I - 7.55I^2, \\ H(I) &= 2.59 - 7.55I. \end{aligned} \quad (34)$$

El valor de I para el desprendimiento coincide prácticamente con el de Thwaites.

4.- Capa límite térmica a bajas velocidades y temperatura de pared constante.

La ecuación (8.4) de la energía en forma integral nos permitiría obtener el flujo de calor en la pared, resolviéndola conjuntamente con la de cantidad de movimiento. En el caso en que los efectos de compresibilidad son despreciables y que la viscosidad pueda considerarse constante (caso de los líquidos y frecuentemente en los gases a bajos números de Mach), la ecuación de la energía está desacoplada de la de cantidad de movimiento y puede resolverse una vez que se ha resuelto la de cantidad de movimiento.

En el supuesto de que el número de Mach de la corriente exterior es pequeño frente a la unidad ($M_e \ll 1$) y que la temperatura de la pared es constante, la ecuación (8.4) toma la forma,

$$\frac{dD}{dx} + \frac{D}{u_e} \frac{du_e}{dx} = S_t, \quad (35)$$

donde D toma la forma,

$$\mathbf{D} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left[1 - \frac{T - T_p}{T_e - T_p} \right] dy, \quad (36)$$

por ser la energía cinética despreciable frente a la térmica ($M_e \ll 1$). El número de Stanton S_t toma la forma,

$$S_t = \frac{q_p}{r_e u_e c_p (T_p - T_e)}, \quad (37)$$

siendo T_p la temperatura constante de la pared y T_e la temperatura exterior a la capa límite, también constante.

Si se utiliza el método de Pohlhausen para determinar $u/u_e = f(\mathbf{h})$, con $\mathbf{h} = y/h$, también puede utilizarse el mismo método para determinar.

$$\frac{T - T_e}{T_p - T_e} = L(\mathbf{h}_e), \quad (38)$$

con $\mathbf{h}_e = y/h_e$. Cuando se va a determinar \mathbf{D} hay que hacer la integral (36) que toma la forma,

$$\mathbf{D} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left[1 - \frac{T - T_p}{T_e - T_p} \right] dy = h_e \int_0^1 f(\mathbf{h}) [1 - L(\mathbf{h}_e)] d\mathbf{h}_e, \quad (39)$$

de modo que la relación \mathbf{D}/h_e es una función del cociente de los espesores de la capa límite térmica y viscosa h_e/h . Por lo tanto, la función será diferente dependiendo de que h_e/h sea mayor o menor que la unidad³, de modo que el procedimiento de cálculo resulta ser tedioso.

La ecuación (35) puede escribirse en la forma,

$$\frac{u_e}{\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{D}^2}{dx} = -2 \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{n}} \frac{du_e}{dx} + 2 \frac{u_e \mathbf{D}}{\mathbf{n}} S_t, \quad (40)$$

que resulta ser, al igual que en el método de Thwaites, una función de la forma,

$$\frac{u_e}{\mathbf{n}} \frac{d\mathbf{D}^2}{dx} = m(P_r) - n(P_r) \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{n}} \frac{du_e}{dx}, \quad (41)$$

donde los coeficientes m y n son funciones del número de Prandtl P_r ⁴.

De acuerdo con (40) y (41), el número de Stanton puede escribirse en la forma,

$$S_t = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{n}}{u_e \mathbf{D}} \left[m - (n - 2) \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{n}} \frac{du_e}{dx} \right]. \quad (42)$$

La solución de la ecuación (41), al igual que la de (29), es de la forma,

³ Para más detalles véase referencia [3], página 306.

⁴ Véase referencia [3], página 308 y referencia [5], páginas 282-285.

$$\frac{D^2}{n} = m u_e^{-n} \int_0^x u_e^{n-1} dx, \quad (43)$$

que sustituido en (42) proporciona,

$$\begin{aligned} N_x &= P_r R_{ex} S_t = \\ &= \frac{\frac{1}{2} P_r R_{ex}^{1/2} \sqrt{x} u_e^{(n-1)/2} \left[m - (n-2) m u_e^{-n} \frac{du_e}{dx} \int_0^x u_e^{n-1} dx \right]}{\left[m \int_0^x u_e^{n-1} dx \right]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (44)$$

donde N_x es el número de Nusselt, definido como,

$$N_x = \frac{x q_p}{k(T_p - T_e)} = P_r R_{ex} S_t. \quad (45)$$

En el caso de una placa plana, donde u_e es constante, la ecuación (44) proporciona,

$$N_x = \frac{1}{2} P_r \sqrt{m} R_{ex}^{1/2}, \quad (46)$$

mientras que en el punto de remanso, donde $u_e = ax$, con $a = du_e/dx$, se tiene,

$$N_x = P_r \sqrt{\frac{m}{n}} R_{ex}^{1/2}, \quad (47)$$

donde $R_{ex} = u_e x / \nu = a x^2 / \nu$ en este caso.

Las relaciones (46) y (47) pueden obtenerse directamente de la ecuación diferencial (41). En efecto, para la placa plana se tiene,

$$\frac{u_e}{n} \frac{dD^2}{dx} = m \Rightarrow \left(\frac{D}{x} \right)^2 = m R_{ex}^{-1},$$

que sustituido en (42) proporciona,

$$S_t = \frac{1}{2} \sqrt{m} R_{ex}^{-1/2} \Rightarrow N_x = \frac{1}{2} P_r \sqrt{m} R_{ex}^{1/2},$$

que coincide con el valor dado en (46).

Para el caso del punto de remanso, como $u_e = 0$, en (41) debe ocurrir que,

$$\frac{D^2}{n} a = \frac{m}{n} \Rightarrow \left(\frac{D}{x} \right)^2 = \frac{m}{n} \frac{n}{a x^2} = \frac{m}{n} R_{ex}^{-1},$$

que sustituido en (42), proporciona,

$$N_x = P_r R_{ex} S_t = P_r \sqrt{\frac{m}{n}} R_{ex}^{1/2},$$

que coincide con (47).

De acuerdo con la referencia [5], los coeficientes m y n se pueden aproximar por,

$$m = 0.441 P_r^{-1.3}; \quad n = 1.356 P_r^{-0.07}, \quad (48)$$

que para el caso del aire ($P_r = 0.72$) estos coeficientes valen $m = 0.676$ y $n = 1.388$. Con los valores de m y n dados en (45) se obtiene un error menor del 4% en el rango de números de Prandtl $0.6 \leq P_r \leq 15$. En el caso del aire ($P_r = 0.72$), las relaciones (46) y (47) toman la forma,

$$\begin{aligned} \text{Placa plana:} \quad N_x &= 0.296 R_{ex}^{1/2} & (\text{Solución exacta: } N_x &= 0.298 R_{ex}^{1/2}), \\ \text{Punto de Remanso: } N_x &= 0.503 R_{ex}^{1/2} & (\text{Solución exacta: } N_x &= 0.501 R_{ex}^{1/2}), \end{aligned}$$

en las que el error esta dentro de $\pm 0.5\%$.

5.- Referencias

- [1] **Rosenhead, L.** (Ed.), "Laminar Boundary Layers", Oxford Univ. Press, 1963.
- [2] **Loitsyanskii, L.G.**, "Mechanics of Liquid and Gases", International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, 1966.
- [3] **Schlichting, H.**, "Boundary-Layer Theory", seventh edition, McGraw-Hill Book Co., 1979.
- [4] **Young, A.D.**, "Boundary Layers", AIAA Education Series, J.S. Przemieniecki Ed., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1989.
- [5] **White, F.M.**, "Viscous Fluid Flow", Mechanical Engineering Series, McGraw-Hill Inc., 1991.