

Introducción a la capa límite turbulenta bidimensional e incompresible

M. Rodríguez

1 Introducción

En el movimiento turbulento en tubos hemos visto que existen varias regiones. Una región cercana a la pared, donde los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden. Esta región tiene una dimensión característica del orden de ν/u_* y la velocidad media U es del orden de u_* definida como $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$, siendo τ_p el esfuerzo en la pared. En la zona central del tubo la velocidad media U difiere de la velocidad $U_0 = Q/A$ en cantidades del orden de u_* . Esta es la llamada zona del defecto de velocidades. Ambas zonas, la cercana a la pared y la central del tubo, empalman en la región denominada logarítmica donde los esfuerzos turbulentos son los importantes. Los esfuerzos turbulentos $-\rho \overline{u'v'}$ son del orden de $\rho u_*^2 = \tau_p$ en toda la región.

En el caso de una capa límite turbulenta completamente desarrollada en la que $u_*\Delta/\nu \gg 1$ (donde Δ es el espesor normalizado de la capa límite, definido más adelante), la estructura del flujo es prácticamente similar. En la región cercana a la pared los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden, la longitud característica sigue siendo ν/u_* y la velocidad media del orden de u_* . Fuera de esta región y de la zona logarítmica, de nuevo se tiene la zona del defecto de velocidades, que ocupa una región del orden del espesor de la capa límite Δ , y allí la velocidad media U difiere de la velocidad exterior U_e en cantidades del orden de u_* .

2 Ecuaciones

Las ecuaciones para una capa límite turbulenta, bidimensional e incompresible son

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (2)$$

donde el término $U_e (dU_e/dx)$ representa el gradiente de presiones siendo U_e la velocidad de la corriente exterior, sólo función de x . Teniendo en cuenta que

$$UU = U(U - U_e) + U_e U ; \quad VU = V(U - U_e) + U_e V, \quad (3)$$

y con la ecuación (1) de la continuidad, la ecuación (2) de la cantidad de movimiento se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} [U(U - U_e)] + \frac{\partial}{\partial y} [V(U - U_e)] + (U - U_e) \frac{dU_e}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Multiplicando (4) por dy e integrando entre $y = 0$ (donde U y V son nulas) e $y \rightarrow \infty$ (donde $U = U_e$) se obtiene la ecuación integral de Karman

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty [U(U - U_e)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^\infty (U - U_e) dy = -u_*^2, \quad (5)$$

donde

$$\int_0^\infty (U_e - U) dy = \delta^* U_e, \quad (6)$$

y

$$\int_0^\infty [U(U_e - U)] dy = \theta U_e^2, \quad (7)$$

siendo δ^* el espesor de desplazamiento y θ el de cantidad de movimiento. Por conveniencia utilizaremos el espesor normalizado Δ tal que

$$u_* \Delta = \delta^* U_e = \int_0^\infty (U_e - U) dy. \quad (8)$$

3 Zonas del movimiento

3.1 Zona del defecto de velocidades

En la zona del defecto de velocidades, la coordenada transversal es $y \sim \Delta$, la diferencia de velocidades es $U - U_e \sim u_* \ll U_e$ y el número de Reynolds $u_* \Delta / \nu \gg 1$. Todos los términos del primer miembro de (4) son del orden de $u_* U_e / L$, donde L es la longitud característica a lo largo de la capa límite. El término de los esfuerzos turbulentos es del orden de u_*^2 / Δ y el de los viscosos del orden de $\nu u_* / \Delta^2$ ya que $\partial U / \partial y = \partial(U - U_e) / \partial y \sim u_* / \Delta$.

La relación entre los esfuerzos viscosos y los turbulentos es del orden $\nu / u_* \Delta \ll 1$, de modo que los esfuerzos viscosos son despreciables frente a los turbulentos.

La relación entre los términos convectivos y el gradiente de presiones del primer miembro y los esfuerzos turbulentos es del orden de $(U_e / u_*) (\Delta / L)$, que es el producto de una cantidad grande por una pequeña. Si la relación anterior fuese mucho menor que la unidad significaría que los esfuerzos turbulentos no varían con y . Como fuera de la capa límite son nulos, la solución proporcionaría $-\overline{u'v'} = 0$, lo que es una situación imposible. En el caso opuesto, quedaría el primer miembro de (4) igual a cero. Como fuera de la capa la velocidad debe tender a U_e , la solución sería $U = U_e$ y no existiría la capa límite, al menos en esta región exterior. Es evidente, por tanto, que el límite distinguido es aquel que hace

$$\frac{u_*}{U_e} \sim \frac{\Delta}{L} \ll 1.$$

De acuerdo con lo anterior, la velocidad $U \approx U_e$ en primera aproximación, de modo que de la ecuación de la continuidad se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \approx -\frac{dU_e}{dx}, \quad (9)$$

lo que permite escribir

$$V \approx -y \frac{dU_e}{dx}. \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (9), (10) y que $U \approx U_e$, la ecuación (4) de la cantidad de movimiento se reduce a

$$U_e \frac{\partial}{\partial x} (U - U_e) + (U - U_e) \frac{dU_e}{dx} - y \frac{dU_e}{dx} \frac{\partial}{\partial y} (U - U_e) = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \overline{u'v'} \right). \quad (11)$$

Esta ecuación es lineal para el defecto de velocidades $U_e - U$ y se denomina ecuación linealizada de la capa límite.

La solución de la ecuación (11) puede escribirse en la forma

$$U = U_e + u_* F \left(\frac{y}{\Delta}, x \right), \quad (12)$$

que no es válida para valores pequeños de y/Δ , ya que en ese caso U ya no difiere poco de U_e como se ha supuesto hasta aquí.

3.2 Zona cercana a la pared

En la zona cercana a la pared la velocidad $U \sim u_*$ y los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden. Dado que $\nu (\partial U / \partial y) \sim \nu u_* / y$ y $-\overline{u'v'} \sim u_*^2$, ambos términos son del mismo orden a distancias de la pared tales que

$$y_+ = \frac{u_* y}{\nu} \sim 1 \text{ y en esta zona es } U_+ = \frac{U}{u_*} \sim 1. \quad (13)$$

Los términos del primer miembro de (4) son ahora

$$\frac{\partial}{\partial x} [U (U - U_e)] \sim \frac{\partial}{\partial y} [V (U - U_e)] \sim \frac{U_e u_*}{L}, \quad (14)$$

$$(U - U_e) \frac{dU_e}{dx} \sim \frac{U_e^2}{L}, \quad (15)$$

de modo que el término más importante es el asociado al gradiente de presiones. Dado que en el segundo miembro se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(- \overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \sim \frac{u_*^2}{y} \sim \frac{u_*^3}{\nu}, \quad (16)$$

la relación entre el término del gradiente de presiones y los de los esfuerzos es

$$\frac{U_e^2}{L} \frac{\nu}{u_*^3} \sim \left(\frac{U_e}{u_*} \frac{\Delta}{L} \right) \left(\frac{U_e}{u_*} \right) \left(\frac{\nu}{u_* \Delta} \right), \quad (17)$$

donde el factor del primer paréntesis es de orden unidad, como se vio anteriormente. Los dos últimos paréntesis representan el producto de un número grande por uno pequeño que, como más adelante veremos¹, se mantiene todavía pequeño. Por lo tanto, con

$$\frac{U_e^2}{L} \frac{\nu}{u_*^3} \sim \left(\frac{U_e}{u_*} \right) \left(\frac{\nu}{u_* \Delta} \right) \ll 1, \quad (18)$$

se concluye que el término del gradiente de presiones es también despreciable y la ecuación (4) en las proximidades de la pared se reduce a un balance entre los esfuerzos viscosos y turbulentos.

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (19)$$

¹Más adelante se muestra que $\frac{U_e}{u_*} \sim \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right)$, de modo que $\frac{U_e}{u_*} \frac{\nu}{u_* \Delta} \sim \left(\frac{\nu}{u_* \Delta} \right) \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right) \ll 1$ cuando $\frac{u_* \Delta}{\nu} \gg 1$.

que integrada una vez proporciona

$$-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_p}{\rho} = u_*^2, \quad (20)$$

o en forma adimensional

$$\frac{-\overline{u'v'}}{u_*^2} + \frac{\partial (U/u_*)}{\partial (yu_*/\nu)} = 1. \quad (21)$$

Esta ecuación debe integrarse con las condiciones $\overline{u'v'} = 0$ y $U = 0$ en $y = 0$. Utilizando las variables adimensionales definidas en (13) y llamando $G(y_+) = -\overline{u'v'}/u_*^2$, la ecuación (21) se reduce a

$$G + \frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1. \quad (22)$$

La solución de (22) es de la forma

$$U_+ = H(y_+), \text{ o bien } U = u_* H(y_+). \quad (23)$$

3.3 Zona de acoplamiento de ambas soluciones. Región logarítmica

La ecuación (11), para valores pequeños de y se reduce a

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} \right), \quad (24)$$

mientras que (19) para valores grandes de y_+ también se reduce a la ecuación anterior. Por lo tanto, ambas soluciones deben coincidir en una región en la que $y/\Delta \ll 1$ pero $y_+ \gg 1$.

Para que ambas soluciones coincidan es necesario que la derivada de la velocidad con respecto a y obtenida de la solución con el defecto de velocidades

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_*}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial (y/\Delta)}, \quad (25)$$

coincida con la derivada de la velocidad con respecto a y obtenida de la solución cercana a la pared

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial H}{\partial y_+}, \quad (26)$$

esto es

$$\frac{u_*}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial (y/\Delta)} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{\partial H}{\partial y_+}. \quad (27)$$

La ecuación (27), con $\eta = y/\Delta$, también puede escribirse en la forma

$$\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = y_+ \frac{\partial H}{\partial y_+}. \quad (28)$$

De (28) se concluye que

$$\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa} \text{ y también } y_+ \frac{\partial H}{\partial y_+} = \frac{1}{\kappa}, \quad (29)$$

donde $\kappa = 0.41$ es la constante universal de Karman.

Las soluciones de las ecuaciones (29) son

$$F = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + A(x), \quad (30)$$

y

$$H = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B. \quad (31)$$

La solución (30) es el comportamiento asintótico de la ley del defecto de velocidades para $\eta = y/\Delta \ll 1$, mientras que (31) es el comportamiento asintótico de la velocidad próxima a la pared cuando $y_+ = u_* y/\nu \gg 1$. Esta región se denomina zona logarítmica por la forma logarítmica del perfil de velocidades.

En (30) hay una función $A(x)$ que aparece como constante de integración cuando se integra con respecto a η . El valor de $A(x)$ depende de la corriente exterior, es decir: del gradiente de presiones de la capa límite. En (31) $B \approx 5.3$ es una constante, ya que allí la solución sólo depende de y_+ , donde la dependencia con x entra a través de u_* .

Las ecuaciones (30) y (31) se han obtenido de la igualdad de las derivadas de la velocidad. Si ahora se impone la condición de igualdad de las velocidades, de (12) y (23) se obtiene

$$U_e + u_* \left[\frac{1}{\kappa} \ln \eta + A(x) \right] = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B \right), \quad (32)$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right) + B - A(x) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{U_e \delta^*}{\nu} \right) + B - A(x), \quad (33)$$

ya que $y_+/\eta = u_* \Delta/\nu = U_e \delta^*/\nu$. La relación (33) permite calcular el esfuerzo en la pared (proporcional a u_*^2) en función del número de Reynolds $U_e \delta^*/\nu$ si la función de $B - A(x)$ fuese conocida².

Obsérvese que esta región logarítmica corresponde a esfuerzo turbulento constante, véase (24), de modo que allí es $G = 1$.

4 Perfil de velocidades cerca de la pared

La ecuación (19) o su equivalente (22) determina la velocidad en las proximidades de la pared. Para valores pequeños de y_+ la ecuación (22) se reduce a

$$\frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1, \quad (34)$$

lo que proporciona $U_+ = y_+$. Esta región es la denominada subcapa laminar. La misma ecuación (22) para valores grandes de y_+ , se reduce a $G = 1$ (esfuerzo turbulento constante). Para determinar la velocidad es necesario conocer la viscosidad turbulenta. Si suponemos que

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (35)$$

²Osérvese que la ecuación (33) proporciona $\frac{U_e}{u_*} \sim \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right)$ y por lo tanto $\frac{U_e}{u_*} \frac{\nu}{u_* \Delta} \ll 1$ cuando $\frac{u_* \Delta}{\nu} \gg 1$, como se había adelantado.

con $\nu_T = \ell_T u_*$, la ecuación (20) toma la forma

$$(\ell_T u_* + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} = u_*^2, \quad (36)$$

que puede escribirse en la forma

$$(1 + \ell_+) \frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1, \quad (37)$$

siendo $\ell_+ = \ell_T u_*/\nu$. En general ℓ_+ es una función de y_+ que tiende a cero cuando $y_+ \rightarrow 0$ y $\ell_+ \rightarrow \kappa y_+$ para valores grandes de y_+ . Esto último se deduce del comportamiento asintótico en la zona logarítmica, ya que para obtener una solución que se comporte como (31) es necesario que $\ell_+ = \kappa y_+$. Para valores intermedios de y_+ la viscosidad cinemática turbulenta puede escribirse en la forma (véase referencia [1]).

$$\ell_+ = \kappa y_+ \left(1 - e^{-y_+/C}\right), \quad (38)$$

que tiene el comportamiento asintótico citado anteriormente. La constante C se determina de los resultados experimentales. La distribución de velocidades está dada por

$$U_+ = \int_0^{y_+} \frac{dy_+}{\left[1 + \kappa y_+ \left(1 - e^{-y_+/C}\right)\right]}. \quad (39)$$

Con $C = 36.5$ se obtienen los resultados mostrados en la figura 1.

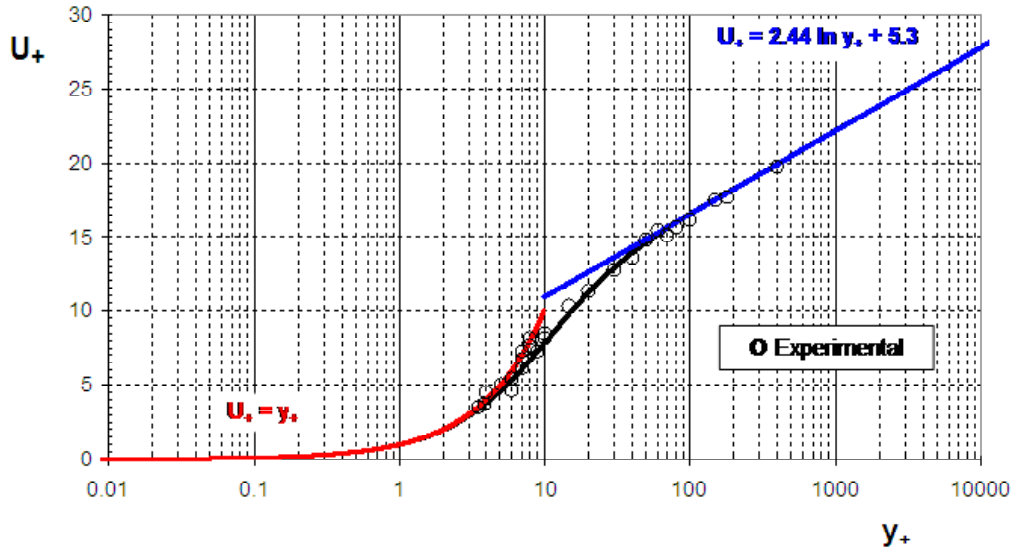


Figura 1.- Velocidad en la proximidad de la pared incluyendo la subcapa laminar (hasta $y_+ \approx 5$), la capa de transición ($5 < y_+ < 40$) y la región logarítmica ($y_+ > 40$).

El esfuerzo viscoso adimensional es $\partial U_+/\partial y_+$, mientras que el esfuerzo turbulento adimensional es $G = \ell_+ (\partial U_+/\partial y_+)$. Ambos esfuerzos se han representado en la figura 2.

5 Capas límites en equilibrio

Para completar la solución del problema planteado, sería necesario resolver la ecuación linealizada de la capa límite, ecuación (11). Este es un problema complejo al que habría que añadir un modelo de viscosidad turbulenta adecuado.

Un caso más simple, pero no exento de dificultades, es aquel en el que la solución (12) no depende de x por separado, esto es: sólo depende de la combinación y/Δ . Estas son las denominadas capas límites en equilibrio, en las que la solución (12) es de la forma³

$$U = U_e + u_* F(\eta) \quad \text{con } \eta = \frac{y}{\Delta}. \quad (40)$$

Para que esto ocurra, el gradiente de presiones en la corriente exterior debe ser de una forma determinada, como se vera a continuación.

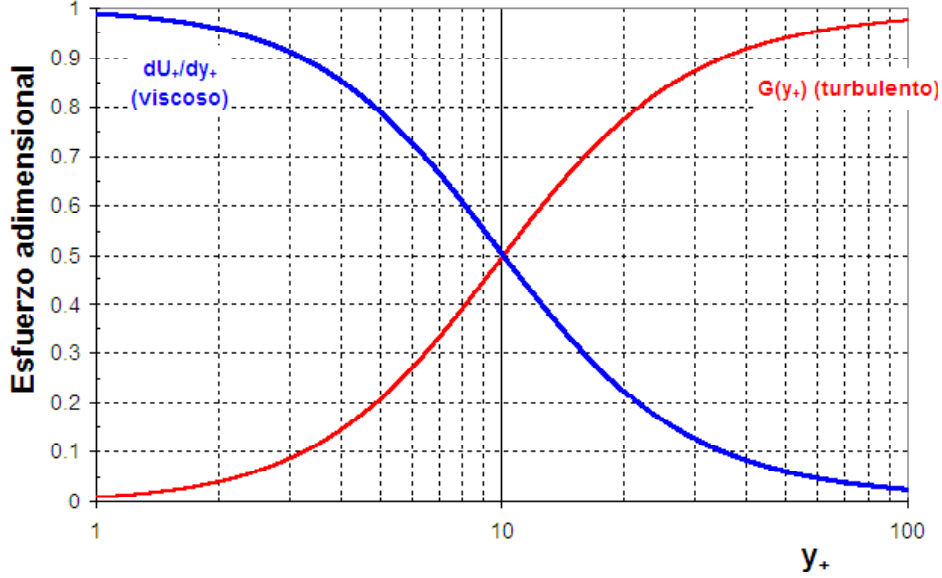


Figura 2.- Esfuerzos adimensionales en las proximidades de la pared hasta la zona logarítmica incluida.

Sustituyendo (40) en (11) se obtiene

$$\left[\frac{\Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} (U_e u_*) \right] F - \left[\frac{1}{u_*} \frac{d}{dx} (U_e \Delta) \right] \eta \frac{dF}{d\eta} = \frac{dG}{d\eta}, \quad (41)$$

donde $G = -\overline{u'v'}/u_*^2$. Es evidente que para que F y G sean sólo funciones de η , es necesario que los coeficientes entre corchetes de (41) sean constantes y, por lo tanto, parece que son necesarias dos condiciones. Sin embargo, puede verse que sólo es necesaria una condición. Para ello téngase en cuenta que los coeficientes de (41) pueden escribirse, el de F en la forma

$$\frac{\Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} (U_e u_*) = 2 \frac{\Delta}{u_*} \frac{dU_e}{dx} + \frac{U_e^2 \Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{u_*}{U_e} \right), \quad (42)$$

y el de $\eta (dF/d\eta)$ como

$$\frac{1}{u_*} \frac{d}{dx} (U_e \Delta) = \frac{U_e}{u_*^2} \frac{d}{dx} (u_* \Delta) - \frac{U_e^2 \Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{u_*}{U_e} \right). \quad (43)$$

Para ver el orden de magnitud de los sumandos de los segundos miembros de (42) y (43) utilizamos la ecuación (33)

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right) + B - A, \quad (44)$$

³Por la definición de Δ , la función F es tal que $\int_0^\infty F d\eta = -1$.

donde ahora A debe ser una constante, que dependerá del gradiente de presiones, pero no dependerá de x ya que F es sólo función de η . La derivada con respecto a x de la ecuación (44) proporciona

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_*}{U_e} \right) = - \frac{(u_*/U_e)^2}{\kappa \left(1 + \frac{u_*}{\kappa U_e} \right)} \frac{d}{dx} [\ln(U_e \Delta)] \sim \frac{1}{L} \left(\frac{u_*}{U_e} \right)^2. \quad (45)$$

Resulta entonces que el segundo sumando de los segundos miembros de (42) y (43) es del orden de Δ/L , mientras que los primeros sumandos de ambas ecuaciones son del orden de $(\Delta/L)(U_e/u_*)$, de modo que el segundo sumando, relativo al primero es del orden de $u_*/U_e \ll 1$, y las ecuaciones (42) y (43) se simplifican a

$$\frac{\Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} (U_e u_*) \approx 2 \frac{\Delta}{u_*} \frac{dU_e}{dx}; \quad \text{y} \quad \frac{1}{u_*} \frac{d}{dx} (U_e \Delta) \approx \frac{U_e}{u_*^2} \frac{d}{dx} (u_* \Delta). \quad (46)$$

Por otro lado, el primer sumando de la ecuación (5) de Karman se puede escribir en la forma

$$- \int_0^\infty U (U - U_e) dy = - \int_0^\infty U_e (U - U_e) dy - \int_0^\infty (U - U_e)^2 dy, \quad (47)$$

esto es

$$- \int_0^\infty U (U - U_e) dy = U_e u_* \Delta - \int_0^\infty (U - U_e)^2 dy. \quad (48)$$

El primer sumando del segundo miembro es $U_e u_* \Delta$, mientras que el segundo sumando del segundo miembro es del orden de $u_*^2 \Delta$ en la zona exterior (donde $U - U_e \sim u_*$ e $y \sim \Delta$) y del orden de $U_e^2 \nu / u_*$ en la zona interior (donde $U \sim u_*$ y por tanto $U - U_e \sim U_e$ con $y \sim \nu / u_*$), para la zona exterior se tiene

$$\frac{\int_0^\infty (U - U_e)^2 dy}{U_e u_* \Delta} \sim \frac{u_*}{U_e} \ll 1 \quad (49)$$

y para la zona interior

$$\frac{\int_0^\infty (U - U_e)^2 dy}{U_e u_* \Delta} \sim \frac{U_e^2 \nu}{U_e u_*^2 \Delta} \sim \left(\frac{U_e}{u_*} \right) \left(\frac{\nu}{u_* \Delta} \right) \ll 1, \quad (50)$$

que es la misma condición dada en (18). En consecuencia (48) se reduce a

$$- \int_0^\infty U (U - U_e) dy \approx U_e u_* \Delta, \quad (51)$$

y la ecuación (5) de Karman puede escribirse como

$$\frac{d}{dx} (U_e u_* \Delta) + u_* \Delta \frac{dU_e}{dx} = u_*^2, \quad (52)$$

o bien

$$\frac{U_e}{u_*^2} \frac{d}{dx} (u_* \Delta) = 1 - 2 \frac{\Delta}{u_*} \frac{dU_e}{dx}. \quad (53)$$

Si llamamos

$$H = - \frac{\Delta}{u_*} \frac{dU_e}{dx}, \quad (54)$$

la ecuación (53) de Karman queda

$$\frac{U_e}{u_*^2} \frac{d}{dx} (u_* \Delta) = 1 + 2H, \quad (55)$$

mientras que (46) toma la forma

$$\frac{\Delta}{u_*^2} \frac{d}{dx} (U_e u_*) = -2II ; \text{ y } \frac{1}{u_*} \frac{d}{dx} (U_e \Delta) = 1 + 2II. \quad (56)$$

Según lo anterior para que F sea sólo función de η , es necesario que el parámetro II , que mide el gradiente de presiones, sea constante. Con ello la ecuación (41) toma la forma

$$-2II F - (1 + 2II) \eta \frac{dF}{d\eta} = \frac{dG}{d\eta}. \quad (57)$$

Para la integración de (57) es necesario relacionar G con F y η (una viscosidad turbulenta). Las condiciones de contorno son

$$F \rightarrow 0 \text{ y } G \rightarrow 0 \text{ para } \eta \rightarrow \infty, \quad (58)$$

además, la solución debe empalmar con la zona logarítmica, de modo que

$$\eta \frac{dF}{d\eta} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \text{ y } G \rightarrow 1 \text{ para } \eta \rightarrow 0. \quad (59)$$

Mediante la solución de (57) se obtiene el valor de la constante $A(II)$ de la solución en la región logarítmica dada en (30), cambiando $A(x)$ por $A(II)$, esto es

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + A(II), \quad (60)$$

lo que proporciona u_*/U_e en función del número de Reynolds y de II en la forma dada en (33)

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right) + B - A(II). \quad (61)$$

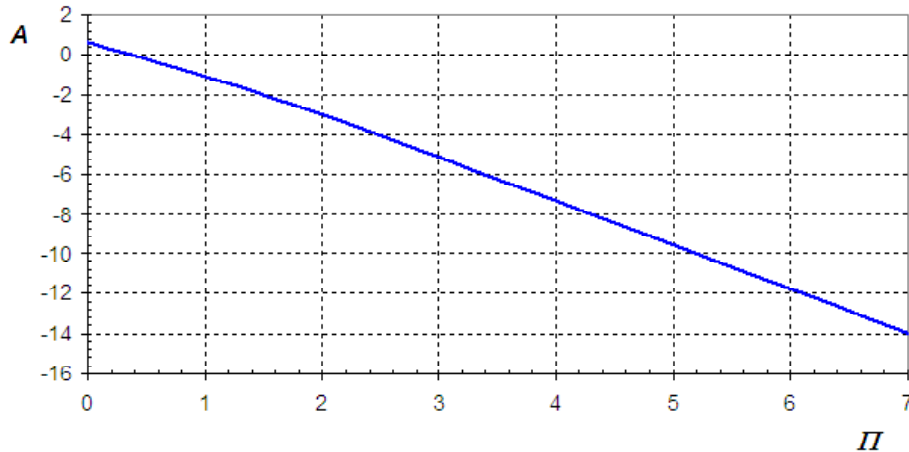


Figura 3.- Valor de la constante A en función del parámetro del gradiente de presiones II .

En la ecuación (61) $\kappa = 0.41$, $B = 5.3$ y $A(II)$ depende del gradiente de presiones. En particular, el valor correspondiente para $II = 0$ es $A(0) = 0.62$. Los valores de $A(II)$, obtenidos a través de la referencia [2], se dan en la figura 3.

Conocido el valor de $A(H)$, las ecuaciones (55) y (61) permiten determinar la evolución con x de Δ y u_* .

$$\frac{U_e}{u_*^2} \frac{d}{dx} (u_* \Delta) = 1 + 2H ; \quad \frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* \Delta}{\nu} \right) + B - A(H). \quad (62)$$

5.1 Capa límite sin gradiente de presiones

Cuando el gradiente de presiones es nulo ($H = 0$) la ecuación (57) toma la forma

$$-\eta \frac{dF}{d\eta} = \frac{dG}{d\eta}. \quad (63)$$

Si suponemos una viscosidad cinemática turbulenta $\nu_T = \ell_T u_*$, entonces tendremos

$$G = \frac{\ell_T}{\Delta} \frac{dF}{d\eta}. \quad (64)$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$ sabemos que $G = 1$ y $dF/d\eta \rightarrow 1/\kappa\eta$. Por lo tanto ℓ_T/Δ debe tender a $\kappa\eta$ cuando $\eta \rightarrow 0$. En la referencia [1] se muestra que ℓ_T/Δ inicialmente es lineal con η , después alcanza un máximo para decrecer lentamente para valores grandes de η . Vamos a suponer una viscosidad turbulenta en la forma

$$\frac{\ell_T}{\Delta} = C \left[1 - e^{-\kappa\eta/C} \right], \quad (65)$$

cuyo comportamiento para $\eta \rightarrow 0$ es el adecuado ($\kappa\eta$) y para $\eta \rightarrow \infty$ tiende a la constante C .

En la figura 4 se muestra el valor de $F(\eta) = (U - U_e)/u_*$ obtenido de la integración de la ecuación (62), junto con (63) y (64) con $C = \frac{1}{44}$. En la misma figura se ha representado la solución logarítmica para $\eta \rightarrow 0$ ($F \rightarrow \frac{1}{0.41} \ln \eta + 0.62$) y los valores experimentales extraídos de la referencia [2]. En la figura 5 se han representado los esfuerzos turbulentos.

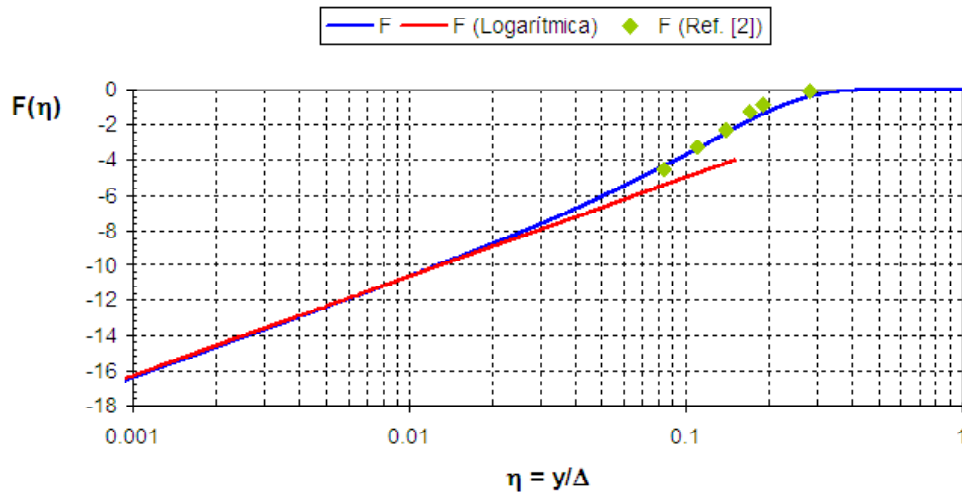
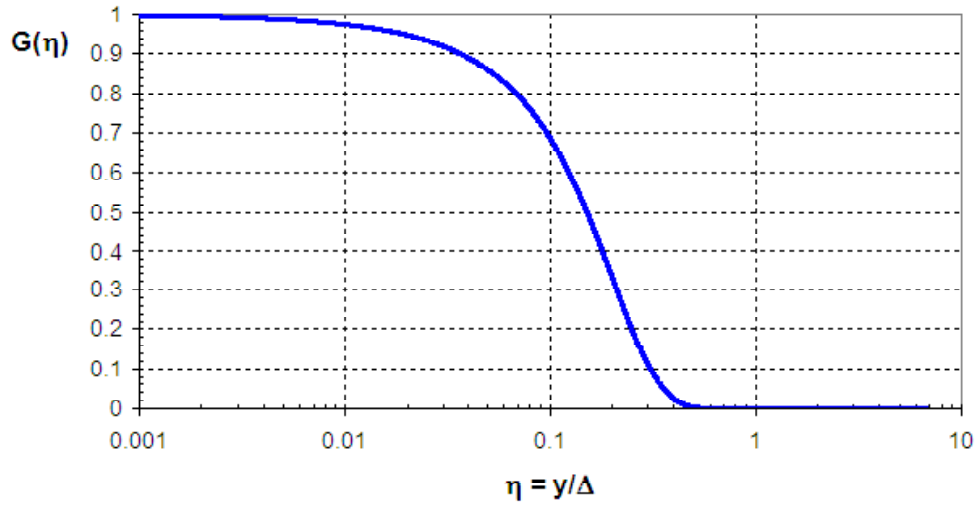


Figura 4.- $F(\eta)$ para el caso de una capa límite sin gradiente de presiones.



Para determinar la evolución con x del esfuerzo en la pared (u_*^2) y el espesor de la capa límite Δ se dispone de las ecuaciones (55) y (61) con $\Pi = 0$, que pueden escribirse en la forma

$$\frac{dRe_{\delta^*}}{dRe_x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\kappa} \ln Re_{\delta^*} + B - A\right)^2}, \quad (66)$$

junto con

$$\frac{u_*}{U_e} = \frac{1}{\frac{1}{\kappa} \ln Re_{\delta^*} + B - A}, \quad (67)$$

donde $Re_{\delta^*} = U_e \delta^* / \nu$, $Re_x = U_e x / \nu$ y se ha hecho uso de la igualdad $U_e \delta^* = u_* \Delta$.

La integración de la ecuación (65) con $B - A = 4.68$ se muestra en la figura 6.

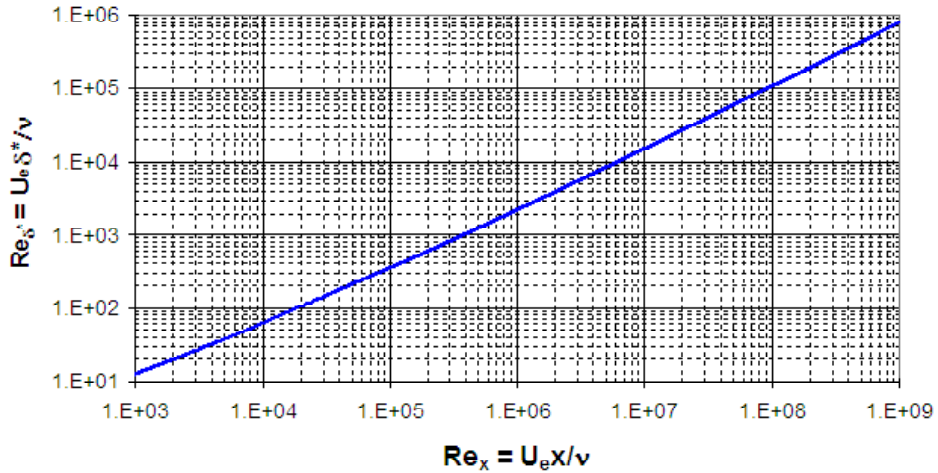


Figura 6.- Reynolds basado en el espesor de desplazamiento, δ^* , en función del Reynolds basado en en la distancia, x , a lo largo de la capa límite.

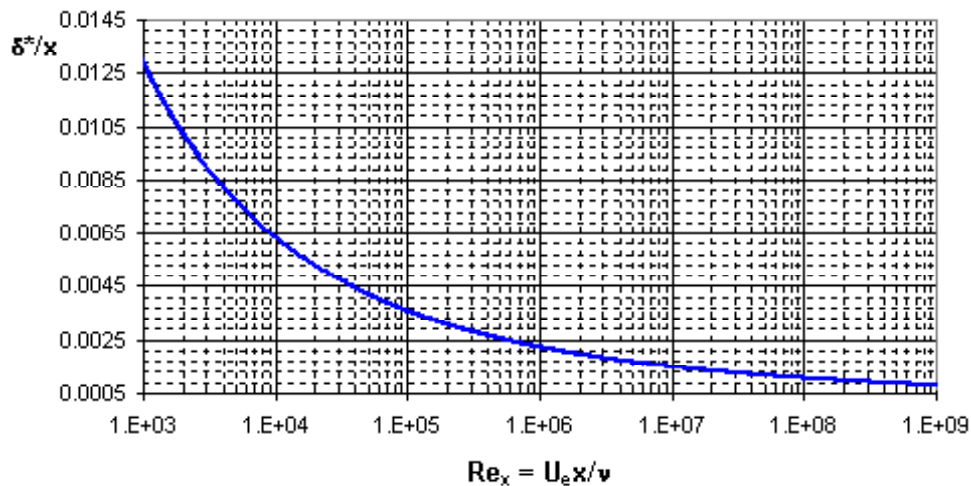


Figura 7.- Espesor de desplazamiento en función del número de Reynolds basado en la distancia x a lo largo de la capa límite.

En la figura 7 se muestra el espesor de desplazamiento, referido a x , en función del Reynolds Re_x . De acuerdo con la aproximación utilizada en la que la velocidad U difiere de U_e en cantidades del orden de $u_* \ll U_e$, el espesor de desplazamiento, δ^* , y el de cantidad de movimiento, θ , son iguales en primera aproximación, ya que en (48) se vió que el segundo sumando del segundo miembro es despreciable frente al primero, y este segundo sumando es el que diferencia a los dos espesores citados.

En la figura 8 se ha representado el coeficiente de fricción en función del número de Reynolds $U_e x / \nu$.

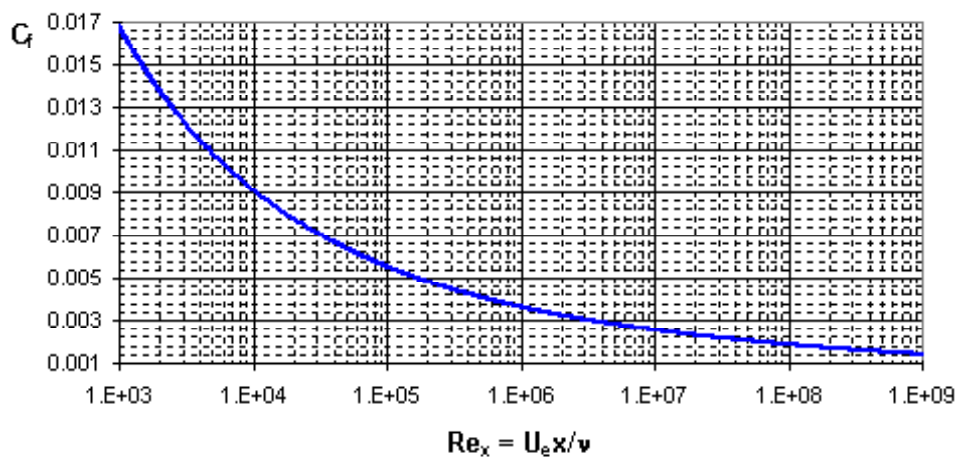


Figura 8.- Coeficiente de fricción en función del Reynolds basado en la distancia x a lo largo de la capa límite.

5.1.1 Análisis simplificado

Prandtl observó, con los datos experimentales de que disponía, que el perfil de velocidades en la zona exterior de la capa límite se puede aproximar por la ley potencial de velocidades

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{para } y \leq \delta \quad \text{y} \quad \frac{U}{U_e} = 1 \quad \text{para } y > \delta. \quad (68)$$

Mediante esta ley de velocidades se puede determinar el espesor de desplazamiento, δ^* , en función del espesor δ

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \xi^{1/7}\right) d\xi = \frac{\delta}{8}, \quad (69)$$

y el de cantidad de movimiento, θ , también en función de δ ,

$$\theta = \int_0^\infty \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy = \delta \int_0^1 \xi^{1/7} \left(1 - \xi^{1/7}\right) d\xi = \frac{7\delta}{72}. \quad (70)$$

Con la solución obtenida anteriormente, mediante las ecuaciones (62), (63) y (64), se ha representado la velocidad U/U_e en función de y/δ y el resultado se ha comparado con (67) en la figura 9. Se han elegido diferentes secciones a lo largo de la capa límite (distintos valores de u_*/U_e) caracterizadas por el valor del Reynolds $Re_x = U_e x/\nu$.

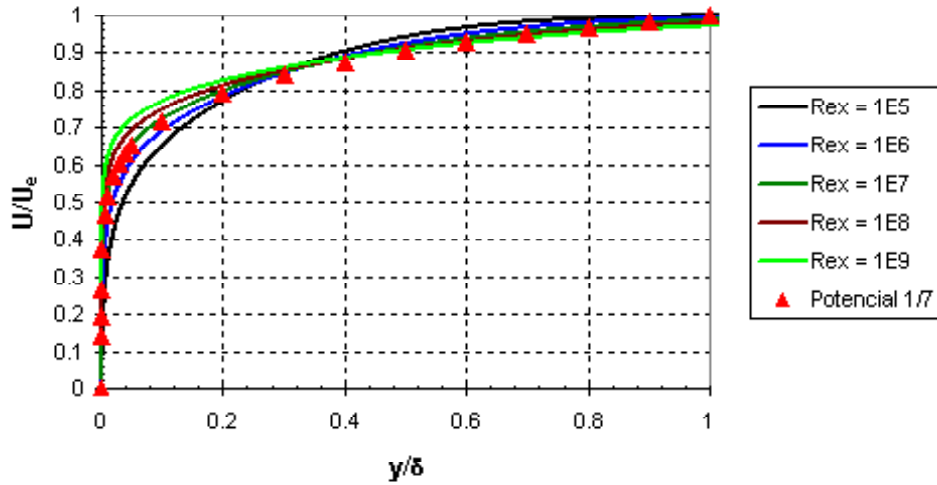


Figura 9.- Perfiles de velocidad U/U_e en función de y/δ en distintas secciones a lo largo de la capa límite. Comparación con el perfil potencial $U/U_e = (y/\delta)^{1/7}$.

El perfil potencial no permite obtener el coeficiente de fricción, ya que no es válido cerca de la pared. Mediante la ley logarítmica se obtiene el coeficiente de fricción en función del Reynolds $Re_{\delta^*} = U_e \delta^*/\nu$, véase ecuación (66). Como $\delta^* = \delta/8$, la ecuación (66) también puede escribirse en función de $Re_\delta = U_e \delta/\nu$. Siguiendo la sugerencia de Prandtl, estos valores pueden ajustarse mediante una ley del tipo

$$C_f \simeq a Re_\delta^{-1/6}. \quad (71)$$

En la figura 10 se muestra la comparación entre la correlación anterior (con $a \approx 0.02$) y la solución correspondiente a la ley logarítmica (67). Otro tipo de correlaciones pueden verse en la referencia [4].

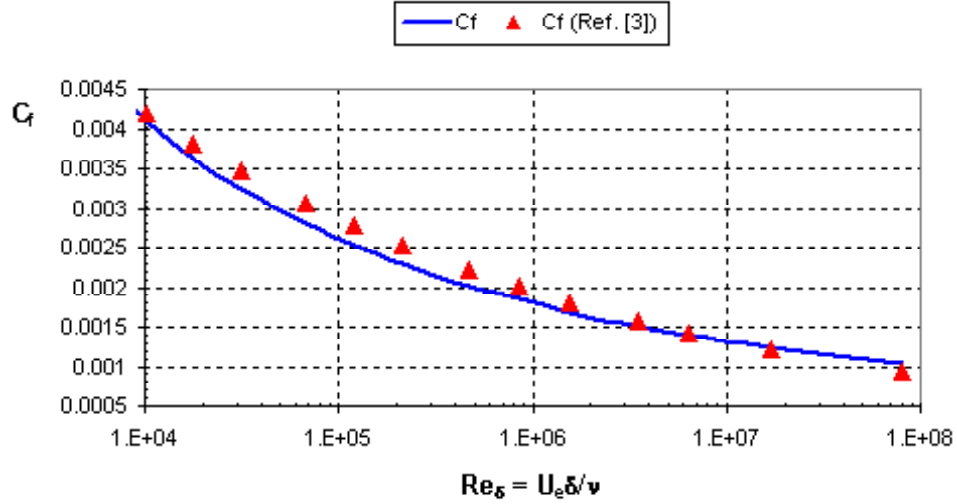


Figura 10.- Correlación del coeficiente de fricción, según la ecuación (70) con $a \approx 0.02$, comparado con la solución correspondiente a ley logarítmica, en función del Reynolds Re_δ .

Con la ecuación integral de Karman

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}C_f, \quad (72)$$

el perfil de velocidades (68) y el coeficiente de fricción (71) se obtiene

$$\frac{7}{72} \frac{dRe_\delta}{dRe_x} = \frac{a}{2} (Re_\delta)^{-1/6}, \quad (73)$$

lo que proporciona

$$Re_\delta = (6aRe_x)^{6/7}, \quad (74)$$

de modo que

$$C_f = a (Re_\delta)^{-1/6} = a (6aRe_x)^{-1/7} \approx 0.027Re_x^{-1/7}. \quad (75)$$

En la figura (11) se comparan los valores de C_f obtenidos con (75) y con la ley logarítmica.

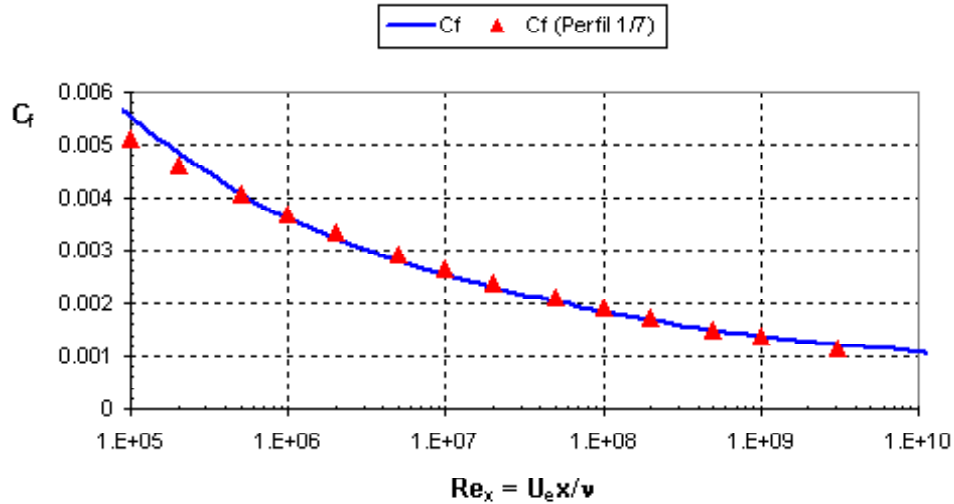


Figura 11.- Coeficiente de fricción, según la ecuación (74), comparado con la solución correspondiente la ley logarítmica, en función del Reynolds Re_x .

Como puede observarse, este método simple reproduce bien los resultados.

6 Referencias

- [1] Stephen B. Pope, "Turbulent Flows", Cambridge Univ. Press, 2000.
- [2] Tennekes, H and J. L. Lumley, "A First Course in Turbulence", The MIT Press, Massachusetts, 1972.
- [3] White, F. M., "Mecánica de Fluidos", McGraw-Hill, Madrid, 1979.
- [4] Schlichting, H., "Boundary-Layer Theory", McGraw-Hill, New York, 1987.
- [5] Wilcox, D. C., "Turbulence Modeling for CFD", DCW Industries, La Cañada, Ca., 1993.