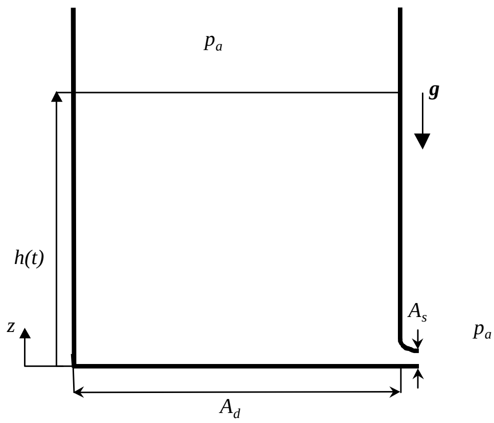
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos

En la descarga de un depósito de área de la base A_d y altura inicial de agua $h\,(0)$, tales que $h\,(0) \sim \sqrt{A_d}$, que se descarga a través de un orificio de área de salida A_s, tal que $A_s \ll A_d$, hay dos longitudes características típicas; una de ellas $L \sim h\,(0) \sim \sqrt{A_d}$ donde las velocidades son del orden de la velocidad característica en el depósito, v_{cd},; y la otra es $\ell \sim \sqrt{A_s} \ll L$, donde la velocidad es del orden de la velocidad de salida, v_{cs}.



El orden de magnitud de estas velocidades es muy diferente ya que de la ecuación de la continuidad se tiene

$$v_{cd}L^2 \sim v_{cs}\ell^2 \;\Rightarrow\; \frac{v_{cd}}{v_{cs}} \sim \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 \ll 1.$$

Los órdenes de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación de cantidad de cantidad de movimiento para el depósito, cuya longitud característica es L y su velocidad característica es v_{cd}, son

$$\underset{\rho\frac{v_{cd}}{t_c}}{\underset{\downarrow}{\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}} + \underset{\rho\frac{v_{cd}^2}{L}}{\underset{\downarrow}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}} = \underset{\frac{\Delta_d(P-p_a)}{L}}{\underset{\downarrow}{-\nabla\left(P-p_a\right)}} + \underset{\frac{\mu v_{cd}}{L^2}}{\underset{\downarrow}{\nabla\cdot\tau'}}$$

y dividiendo por el orden de magnitud del término convectivo se tiene

$$\underset{\frac{L}{v_{cd}t_c}}{\underset{\downarrow}{\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}} + \underset{O(1)}{\underset{\downarrow}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}} = \underset{\frac{\Delta_d(P-p_a)}{\rho v_{cd}^2}}{\underset{\downarrow}{-\nabla\left(P-p_a\right)}} + \underset{\frac{\mu}{\rho v_{cd}L}=\frac{1}{Re_d}}{\underset{\downarrow}{\nabla\cdot\tau'}}$$

donde $P = p + \rho g z$ es la presión motriz. El término no estacionario es del orden de $L/v_{cd}t_c$ con respecto al término convectivo. Dado que el tiempo característico, t_c, es del orden del tiempo de descarga del depósito, $t_c \sim t_d \sim L/v_{cd}$, resulta que $L/v_{cd}t_c \sim 1$. Tenemos, por tanto,

$$\underset{\overset{\downarrow}{O(1)}}{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}} + \underset{\overset{\downarrow}{O(1)}}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}} = -\underset{\overset{\downarrow}{\frac{\Delta_d(P-p_a)}{\rho v_{cd}^2}}}{\nabla\left(P-p_a\right)} + \underset{\overset{\downarrow}{\frac{\mu}{\rho v_{cd}L}=\frac{1}{Re_d}}}{\nabla\cdot\tau'}$$

y, de acuerdo con esto, el término de presiones es del orden del más importante; esto es, es del orden de la unidad si el Reynolds en el depósito es grande frente a la unidad

$$\frac{\Delta_d\left(P-p_a\right)}{\rho v_{cd}^2} \sim O\left(1\right)\ ;\ \Delta_d\left(P-p_a\right) \sim \rho v_{cd}^2 \ \text{ si } \ Re_d \gg 1,$$

y del orden del término viscoso en caso contrario

$$\frac{\Delta_d\left(P-p_a\right)}{\rho v_{cd}^2} \sim \frac{1}{Re_d}\ ;\ \Delta_d\left(P-p_a\right) \sim \frac{\rho v_{cd}^2}{Re_d} \ \text{ si } \ Re_d \ll 1.$$

Haciendo una estimación similar para la región de salida donde la velocidad característica es v_{cs} y la longitud característica ℓ, se tiene,

$$\underset{\overset{\downarrow}{\rho\frac{v_{cs}}{t_c}}}{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}} + \underset{\overset{\downarrow}{\rho\frac{v_{cs}^2}{\ell}}}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}} = -\underset{\overset{\downarrow}{\frac{\Delta_s(P-p_a)}{\ell}}}{\nabla\left(P-p_a\right)} + \underset{\overset{\downarrow}{\frac{\mu v_{cs}}{\ell^2}}}{\nabla\cdot\tau'}$$

y refiriéndolos de nuevo al convectivo se tiene

$$\underset{\overset{\downarrow}{\frac{\ell}{v_{cs}t_c}}}{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}} + \underset{\overset{\downarrow}{O(1)}}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}} = -\underset{\overset{\downarrow}{\frac{\Delta_s(P-p_a)}{\rho v_{cs}^2}}}{\nabla\left(P-p_a\right)} + \underset{\overset{\downarrow}{\frac{\mu}{\rho v_{cs}\ell}=\frac{1}{Re_s}}}{\nabla\cdot\tau'}$$

El término no estacionario es, con respecto al convectivo en esta región, del orden de

$$\frac{\ell}{v_{cs}t_c} \sim \frac{\ell}{L}\left(\frac{L}{v_{cd}t_c}\right)\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \sim \frac{\ell}{L}\frac{v_{cd}}{v_{cs}},$$

ya que $\frac{L}{v_{cd}t_c} \sim 1$. Como $\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \sim \left(\frac{\ell}{L}\right)^2$ se tiene

$$\frac{\ell}{v_{cs}t_c} \sim \frac{\ell}{L}\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \sim \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 \ll 1,$$

de modo que el movimiento es casi estacionario en la región de salida. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento en esta región se reduce a

$$\underset{\overset{\downarrow}{O(1)}}{\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}} = -\underset{\overset{\downarrow}{\frac{\Delta_s(P-p_a)}{\rho v_{cs}^2}}}{\nabla\left(P-p_a\right)} + \underset{\overset{\downarrow}{\frac{\mu}{\rho v_{cs}\ell}=\frac{1}{Re_s}}}{\nabla\cdot\tau'}$$

Si el número de Reynolds en la región de salida fuese pequeño frente a la unidad, $Re_s \ll 1$, el número de Reynolds en el depósito es también pequeño frente a la unidad ya que

$$Re_d = \frac{\rho v_{cd} L}{\mu} = \frac{\rho v_{cs} \ell}{\mu} \frac{L}{\ell} \frac{v_{cd}}{v_{cs}} \sim Re_s \frac{L}{\ell} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \sim Re_s \frac{\ell}{L} \ll 1,$$

ya que es el producto de dos magnitudes pequeñas frente a la unidad. Por lo tanto, cuando el Reynolds en la salida del depósito es pequeño, también lo es el Reynolds en el depósito y se tiene

$$\frac{\Delta_d (P - p_a)}{\Delta_s (P - p_a)} \sim \frac{\frac{\rho v_{cd}^2}{Re_d}}{\frac{\rho v_{cs}^2}{Re_s}} \sim \left(\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \right)^2 \frac{Re_s}{Re_d} \sim \left(\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \right)^2 \frac{v_{cs}}{v_{cd}} \frac{\ell}{L} \sim \frac{v_{cd}}{v_{cs}} \frac{\ell}{L} \sim \left(\frac{\ell}{L} \right)^3 \ll 1.$$

Es decir, las variaciones espaciales de presión motriz en el depósito son pequeñas comparadas con las que se van a encontrar en la región de salida.

Cuando el Reynolds en la salida es grande frente a la unidad, $Re_s \gg 1$, el Reynolds en el depósito puede ser grande o pequeño frente a la unidad, ya que es del orden de un número grande, Re_s, por uno pequeño, ℓ/L.

Cuando el Reynolds en la salida es grande, $Re_s \gg 1$, y en el depósito pequeño, $Re_d \ll 1$, se tiene

$$\frac{\Delta_d (P - p_a)}{\Delta_s (P - p_a)} \sim \frac{\frac{\rho v_{cd}^2}{Re_d}}{\rho v_{cs}^2} \sim \left(\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \right)^2 \frac{1}{Re_d} \sim \left(\frac{\ell}{L} \right)^4 \frac{L}{\ell} \frac{1}{Re_s} \sim \left(\frac{\ell}{L} \right)^3 \frac{1}{Re_s} \ll 1.$$

De nuevo las variaciones espaciales de presión motriz en el depósito son pequeñas frente a las que se van a encontrar en la región de salida.

Cuando el Reynolds en la salida sigue siendo grande, $Re_s \gg 1$, y también en el depósito, $Re_d \gg 1$, se tiene

$$\frac{\Delta_d (P - p_a)}{\Delta_s (P - p_a)} \sim \frac{\rho v_{cd}^2}{\rho v_{cs}^2} \sim \left(\frac{v_{cd}}{v_{cs}} \right)^2 \sim \left(\frac{\ell}{L} \right)^4 \ll 1.$$

Vemos que en todos los casos, independientemente de como sean los números de Reynolds en la salida y en el depósito, siempre se obtiene que las variaciones espaciales de presión motriz en el depósito son pequeñas frente a las que se van a encontrar en la región de salida. De acuerdo con esto concluimos que en el depósito se tiene siempre

$$P - p_a = p + \rho g z - p_a = constante,$$

y como en $z = h(t)$ es $p = p_a$, la constante es $\rho g h(t)$[1]. Por lo tanto, la distribución de presiones en el depósito está dada por

$$p + \rho g z = p_a + \rho g h(t),$$

[1] Obsérvese que la constante depende del tiempo. Esto es debido a que las variaciones de presión motriz en el depósito son variaciones espaciales, y estas variaciones espaciales son despreciables frente a las que hay en la región de salida, pero la presión en el depósito puede cambiar de un instante a otro a causa de la variación de h(t).

en particular, en el fondo del depósito, $z = 0$, la presión es p_d tal que

$$p_d = p_a + \rho g h(t) .$$

En la región de salida, en la mayoría de los casos prácticos, el número de Reynolds, Re_s, es grande frente a la unidad como comprobaremos más adelante. Si $Re_s \gg 1$, en la ecuación de cantidad de movimiento para esta región, se puede despreciar el término viscoso. Como el término no estacionario ya se vio que era despreciable, esta ecuación queda

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla \left(\frac{P - p_a}{\rho} \right) .$$

Multiplicando esta ecuación escalarmente por la velocidad se obtiene

$$\vec{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{P - p_a}{\rho} \right\} = 0,$$

ya que $\vec{v} \cdot \{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\} = 0$ por ser $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ un vector perpendicular a $\vec{v}$. La ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{P - p_a}{\rho} \right\} = 0,$$

donde s es la coordenada a lo largo de las líneas de corriente. La ecuación se puede integrar para dar

$$P - p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = C_\ell,$$

siendo C_ℓ una constante para cada línea de corriente. Cuando nos movemos aguas arriba del orificio de salida (hacia el interior del depósito) nos encontramos con una región donde la velocidad es del orden de la del depósito, muy pequeña frente a la de la región de salida, y la presión motriz tiende a la de la base del depósito, p_d, ya que en toda la región de salida la altura z es del orden de $\ell \ll L \sim h_0$ y, por lo tanto es prácticamente nula si se compara con $h(t)$. Por lo tanto

$$C_\ell = \rho g h(t) ,$$

de modo que para la región de salida se tiene

$$p - p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h(t) ,$$

ya que como se ha dicho, en la región de salida es $P \approx p$ por ser la altura despreciable frente a $h(t)$. En la sección de salida es $p = p_a$ y $v = v_s$, de modo que se obtiene

$$v_s = \sqrt{2gh(t)}.$$

Obsérvese que el número de Reynolds en la región de salida es del orden de

$$Re_s \sim \frac{\rho\sqrt{gh_0 A_s}}{\mu},$$

donde h_0 es el valor inicial de $h(t)$. Para el caso del agua $\rho = 10^3$ kg/m^3 y $\mu \approx 10^{-3}$ kg/m·s y para valores típicos tales como $h_0 = 1$ m y $\sqrt{A_s} \approx 1$ cm $= 10^{-2}$ m, se tiene $Re_s \sim \frac{10^3\sqrt{10}10^{-2}}{10^{-3}} \sim 10^4 \gg 1$, como se había adelantado.

Conocida la velocidad de salida, se puede determinar la variación de la altura de líquido en el depósito utilizando la ecuación de la continuidad en forma integral para un volumen de control que coincide con el volumen de líquido que en cada instante hay en el depósito

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c} d\Omega + \int_{\Sigma_c} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma = 0.$$

La primera de las integrales es

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c} d\Omega = \frac{dV_c}{dt} = A_d\frac{dh}{dt},$$

mientras que la segunda es

$$\int_{\Sigma_c} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma = \int_{\Sigma_\ell} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma + \int_{\Sigma_s} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma + \int_{A_s} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma.$$

La primera de las integrales del segundo miembro es nula porque la superficie libre, Σ_ℓ, es una superficie fluida y $\vec{v} = \vec{v}_c$. La segunda integral del segundo miembro también es nula porque las superficies sólidas del recipiente, Σ_s, son superficies fijas, de modo que en ellas $\vec{v}_c = 0$, pero además la condición de contorno nos indica que también $\vec{v} = 0$ en Σ_s. La última de las integrales, extendida a la sección de salida A_s, se reduce a

$$\int_{A_s} (\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}d\sigma = \int_{A_s} \sqrt{2gh(t)}d\sigma = A_s\sqrt{2gh(t)},$$

ya que $\vec{v}\cdot\vec{n} = v_s = \sqrt{2gh(t)}$ y $\vec{v}_c = 0$, por ser fija esta superficie. En resumen, la ecuación de la continuidad en forma integral par el depósito se reduce a

$$A_d\frac{dh}{dt} + A_s\sqrt{2gh(t)} = 0.$$

La ecuación diferencial anterior debe integrarse con la condición inicial $h(0) = h_0$. La solución es

$$\frac{h}{h_0} = \left(1 - \frac{A_s}{A_d}\sqrt{\frac{gt^2}{2h_0}}\right)^2.$$

El tiempo que tarda en descargarse el depósito se obtiene de la relación anterior con $h = 0$

$$t_d = \frac{A_d}{A_s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$