

Introducción a la capa límite laminar bidimensional y estacionaria

M. Rodríguez

1 Introducción

En los movimientos a altos números de Reynolds (basado en la longitud característica del movimiento), los efectos viscosos son despreciables. Los efectos de conducción de calor también lo son si el producto del Reynolds por el Prandtl es grande. Esto lleva implícito el despreciar los términos de mayor orden en las derivadas de la velocidad y de la temperatura, de modo que no pueden imponerse todas las condiciones de contorno. Como consecuencia de ello, las condiciones de contorno en el movimiento de un fluido ideal en presencia de una pared se reducen a decir que la velocidad es tangente a la pared (si no hay paso de masa a través de dicha pared). Sin embargo, dentro de la aproximación de un fluido como medio continuo, sabemos que la velocidad de un fluido en contacto con una pared es igual a la velocidad de la pared y que la temperatura del fluido debe coincidir con la de la pared (si a través de dicha pared no hay paso de masa ni reacción química o evaporación en su superficie).

Para poder imponer todas las condiciones de contorno es necesario que los términos viscosos y de conducción de calor sean tan importantes como los convectivos. Sin embargo, si se utiliza la longitud característica ℓ del movimiento, el número de Reynolds es tan alto que estos términos serían despreciables. Por lo tanto, es evidente que cerca de las paredes (donde se deben imponer las condiciones de contorno) la velocidad (y temperatura) sufre variaciones del orden de ella misma en distancias $\delta \ll \ell$. El orden de magnitud de δ se determina de la condición de que los términos viscosos sean tan importantes como los convectivos, que son los más importantes cuando el número de Reynolds es alto.

El primero en indicar la existencia de una zona en la que los efectos viscosos son importantes, a pesar de que el número de Reynolds del movimiento sea alto, fue Prandtl en 1904¹. La idea de Prandtl de una región donde los efectos viscosos son importantes puso en claro multitud de fenómenos que hasta entonces no habían obtenido explicación satisfactoria. En particular explicó el porqué la teoría de fluidos ideales (altos números de Reynolds) proporciona buenos resultados cuando se quiere determinar la sustentación o fuerza normal a la dirección de la corriente incidente sobre un obstáculo, y sin embargo esta teoría ideal es incapaz de proporcionar la resistencia (o componente de la fuerza en la dirección de la corriente incidente). También explico el desprendimiento de la capa límite en cuerpos romos (en general con gradientes adversos de presión), y como consecuencia de ello la existencia de una resistencia de forma (que no depende de la viscosidad, pero es causada por ella).

¹Prandtl, L., "Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung", Proc. III Intern. Math. Congress, Heidelberg (1904).

La traducción al español puede encontrarse en "Versión Crítica en Español del Trabajo de Ludwig Prandtl sobre el Movimiento de Fluidos con Viscosidad muy Pequeña", Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, N° 328, Julio 1992, por M. Rodríguez y R. Martínez-Val.

En cuerpos fuselados la capa límite no se desprende más que en la parte final del cuerpo (como es el caso del perfil de la figura 1), formando una estela muy delgada. En este caso la resistencia es prácticamente toda ella debida al rozamiento (viscosidad). Sin embargo, en un cuerpo romo (figura 2), la capa límite se desprende generando una estela amplia, donde la presión toma valores próximos a la estática en el infinito, mientras que en el borde de ataque la presión es del orden de la de remanso, generándose una fuerza de resistencia del orden de la diferencia de presiones por el área frontal. Esta fuerza, aunque originada por el desprendimiento de la capa límite, que a su vez tiene su origen en la viscosidad, no depende de dicha viscosidad si el número de Reynolds es muy alto.

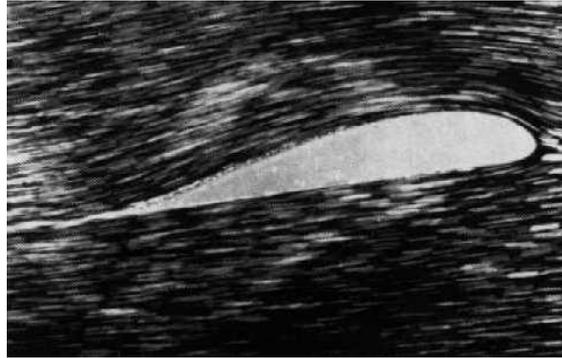


Figura 1.- Capalímite adherida al perfil.

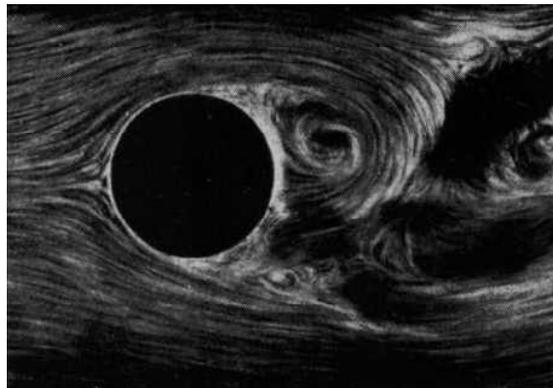


Figura 2.- Estela detrás de un cilindro circular.

En el caso de un cuerpo fuselado, en el que la corriente no está lo suficientemente "alineada" con su geometría, puede desprenderse la corriente como en el caso de un cuerpo romo. Este es el caso del perfil de la figura 1 cuando el ángulo de ataque es elevado (véase figura 3).

En el movimiento de los fluidos alrededor de cuerpos o en presencia de paredes, si el número de Reynolds es grande, hay una región exterior donde los efectos viscosos y de conducción de calor son despreciables. Las ecuaciones se reducen a las de Euler, a las que no se le pueden imponer todas las condiciones de contorno. La solución de Euler proporciona una velocidad tangente a la pared y que varía a lo largo de ella, que denominaremos corriente exterior. Esta denominación se debe a que es la corriente que "se ve" en el exterior de la capa límite.



Figura 3.- Perfil con capa límite desprendida.

Dado que el espesor de la capa límite es pequeño comparado con la dimensión longitudinal, ℓ , característica del movimiento, consideraremos el eje de coordenadas x a lo largo de la superficie del cuerpo y el eje y perpendicular y transversal a la capa. Dado que salvo algunas excepciones, el radio de curvatura de la superficie es grande frente al espesor de la capa límite, consideraremos los ejes $x - y$ como un sistema de coordenadas cartesianas.

2 Ecuaciones de la capa límite bidimensional compresible y estacionaria

Las ecuaciones de la capa límite bidimensional estacionaria de un fluido compresible, pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

La ecuación (1) es la ecuación de la continuidad de la que se deduce que

$$v \sim u \frac{\delta}{\ell} \ll u,$$

por ser $\delta \ll \ell$. Esto último se deduce de la ecuación de cantidad de movimiento, en la que los términos convectivos son del orden del viscoso si

$$\frac{\delta}{\ell} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_e \ell}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1.$$

Dado que $\delta \ll \ell$, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del eje y se reduce a decir que la presión no cambia con y , de modo que adquiere su valor en el exterior de la misma. Por esa razón se ha sustituido $\partial p / \partial x = dp_e / dx$, siendo p_e la presión en el exterior de la capa y conocida de la solución exterior de Euler.

En la ecuación (3) de la energía h_0 es la entalpía de remanso

$$h_0 = h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \approx h + \frac{1}{2} u^2.$$

Como la presión es constante a través de la capa límite, la densidad se determina mediante la ecuación de estado $\rho = p_e/R_g T$ y la entalpía mediante la relación $h = c_p T$ en el caso de los gases.

Para que el término de conducción sea comparable al convectivo en la ecuación (3) de la energía, es necesario que

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{RePr}},$$

siendo δ_T el espesor de la capa donde los efectos de conducción de calor son importantes. Esta capa se denomina capa límite térmica. El número de Prandtl $Pr = \mu c_p/k$ es de orden unidad en el caso de los gases, de modo que el espesor de ambas zonas, viscosa y térmica, es comparable. Puede no ocurrir así en el caso de líquidos, dando lugar a una capa térmica mucho más gruesa que la viscosa si $Pr \ll 1$ (pero $PrRe \gg 1$), o mucho más delgada si $Pr \gg 1$. Para los líquidos, la disipación viscosa es despreciable.

Las condiciones de contorno para integrar las ecuaciones anteriores son

$$\begin{aligned} \text{En } y = 0 : u = 0; v = v_s; h_0 = h_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right), \\ \text{En } y \rightarrow \infty : u = u_e; h_0 = h_{0e}, \\ \text{En } x = 0 : u = u_i(y); h_0 = h_{0i}(y). \end{aligned} \quad (4)$$

En las condiciones anteriores se ha supuesto una velocidad de succión o soplado, v_s , distinta de cero en la pared. En la condición de contorno para la temperatura en la pared se han supuesto dos posibilidades: la temperatura del gas coincide con la temperatura de la pared conocida ($h_p = c_p T_p$), o bien la pared está aislada térmicamente ($\partial T/\partial y = 0$).

Las ecuaciones para el caso incompresible toman la forma simplificada

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{\rho dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (7)$$

don $Pr = \mu c/k$ es el número de Prandtl. Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \text{En } y = 0 : u = 0; v = v_s; T = T_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right), \\ \text{En } y \rightarrow \infty : u = u_e; T = T_e, \\ \text{En } x = 0 : u = u_i(y); T = T_i(y). \end{aligned} \quad (8)$$

2.1 Desprendimiento de la capa límite

Como se ha indicado anteriormente, existe la posibilidad de que el fluido "frenado" por la capa límite pueda ser transportado a la corriente exterior y arrastrado por ella. Cuando este ocurre se dice que la capa límite se ha desprendido una estela como la de las figuras 2 y 3. Cuando existe una región con presiones crecientes a lo largo de la pared ($dp_e/dx > 0$ ó gradiente adverso de presiones) las partículas fluidas frenadas en la capa límite no pueden, en general, penetrar muy

lejos en la zona de gradiente adverso de presión a causa de su baja energía cinética, y la capa límite es deflectada separándose de la pared. El punto de separación corresponde a esfuerzo nulo en la pared, lo que equivale a decir que $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$.

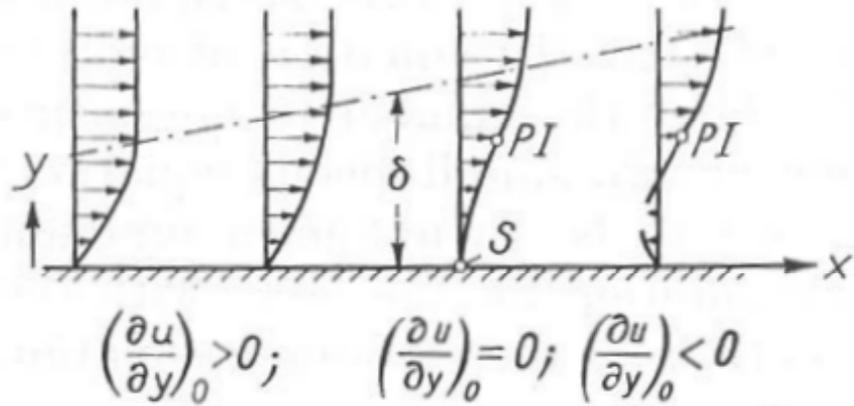


Figura 4.- Esquema de los perfiles de velocidad en la capa límite a lo largo de la pared. S es el punto de separación. PI es el punto de inflexión en el perfil de velocidades.

En la figura 4 se muestra la distribución de velocidades cerca del punto de separación y, si el esfuerzo se anula en la pared, hay un punto de inflexión en el perfil de velocidades.

Si particularizamos la ecuación (2) en la pared con $v_s = 0$ y μ constante, se tiene

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp_e}{dx} \text{ de modo que } \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0. \quad (9)$$

En las proximidades de la pared la curvatura del perfil de velocidades depende sólo del gradiente de presiones externo. Si el gradiente de presiones es favorable ($dp_e/dx < 0$) entonces $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$ y por lo tanto lo es en toda la capa límite, tal como se muestra en la figura 5.

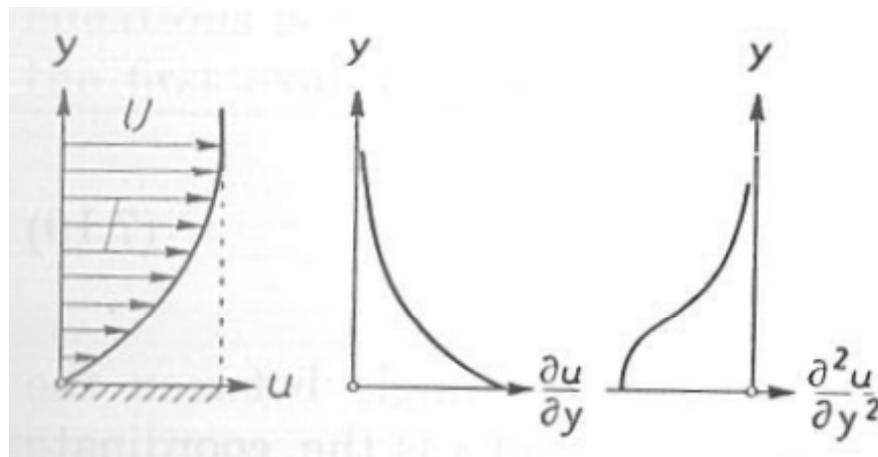


Figura 5.- Distribución de velocidades, esfuerzos y curvatura en la capa límite cuando el gradiente de presiones es favorable.

Sin embargo, cuando el gradiente de presiones es adverso ($dp_e/dx > 0$) se tiene $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0} > 0$, pero a lejos de la pared se tiene $\partial^2 u/\partial y^2 < 0$, de modo que en algún punto del interior debe tenerse $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Éste es el punto de inflexión del perfil de velocidades en la capa límite, tal como se muestra en la figura 6.

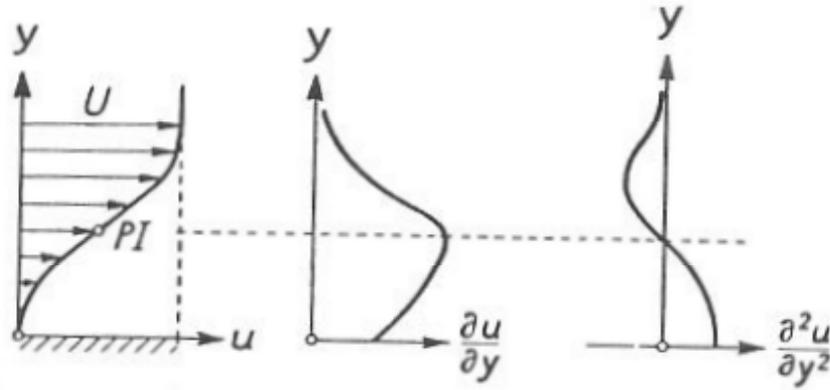


Figura 6.- Distribución de velocidades, esfuerzos y curvatura en la capa límite cuando el gradiente de presiones es adverso. *PI* es el punto de inflexión.

En la región de gradiente adverso de presiones, el perfil de velocidades en la capa límite siempre presenta un punto de inflexión. Dado que cuando el esfuerzo es nulo en la pared, el perfil de velocidades tiene un punto de inflexión (véase figura 4), la separación solo aparece ocurre cuando el gradiente de presiones es adverso (a menos de que exista succión o soplado como veremos a continuación).

2.1.1 Efecto de la succión o soplado

Si ahora suponemos que la velocidad v_s es distinta de cero, la ecuación equivalente a la (5) sería

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp_e}{dx} + \rho v_s \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (10)$$

En la ecuación (6) puede observarse que la velocidad v_s hace el mismo papel que un gradiente adverso de presiones si es positiva (soplado), mientras que si es negativa (succión) hace el papel de un gradiente favorable. Así, si se tiene un gradiente adverso de presiones, pero una velocidad de succión adecuada, puede conseguirse que la capa límite no se desprenda.

En la figura 7 se muestra un canal convergente divergente. El chorro está desprendido de las paredes superior e inferior a causa del gradiente adverso de presiones en estas paredes, como se observa en la foto superior. Cuando se introduce una succión en la pared superior, la corriente se queda adherida a esta pared y se desprende de la inferior, como se observa en la foto intermedia. Por último, en la foto inferior hay succión en ambas paredes, la corriente se queda adherida y solo se desprende cuando desaparece la succión.

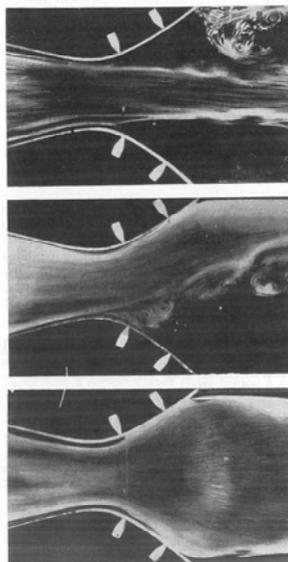


Figura 7.- Canal convergente divergente. En la foto superior se muestra el chorro desprendido. En la foto intermedia hay una succión en la pared superior. En la foto inferior hay succión en la pared superior e inferior.

2.2 Resistencia de forma

Si no hubiese desprendimiento de la capa límite, lo que ocurre en cuerpos fuselados como el perfil de la figura 1, la resistencia del cuerpo sería debida a los esfuerzos de fricción en la pared. Su orden de magnitud estaría dado por

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \sim \mu \frac{U}{\delta} \sim \rho U^2 \frac{\mu}{\rho U \ell} \frac{\ell}{\delta} \sim \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}},$$

donde U es el orden de magnitud de la velocidad exterior. Si A_m es área del cuerpo bañada por el fluido, la resistencia de fricción sería

$$D_v \sim \tau_p A_m \sim \frac{\rho U^2 A_m}{\sqrt{Re}}.$$

En el caso de un cuerpo romo como el de la figura 2, o un cuerpo fuselado a un ángulo de ataque inadecuado como el de la figura 3, la capa límite se desprende generando una estela de dimensión transversal comparable a la dimensión del cuerpo perpendicular a corriente incidente. En la zona desprendida la presión es parecida a la presión aguas arriba no perturbada e incluso menor, mientras que en la parte frontal la presión es del orden de la presión de remanso. Esta diferencia de presiones es del orden de ρU^2 , de modo que la fuerza de resistencia debida a esta diferencia de presiones es

$$D_p \sim \rho U^2 A_F,$$

siendo A_F el área frontal del cuerpo (área proyectada en la dirección de la corriente incidente). A esta resistencia se le denomina resistencia de presión o de forma.

Si se comparan ambas resistencias se obtiene

$$\frac{D_v}{D_p} \sim \frac{A_m/A_F}{\sqrt{Re}},$$

que para $A_m/A_F \sim 1$ (caso de una esfera, por ejemplo), la resistencia debida a la fricción es muy pequeña comparada con la de forma ya que el número de Reynolds es muy alto.

2.3 Espesor de la capa límite

Debido a que la velocidad u tiende asintóticamente al valor exterior u_e , el espesor de la capa límite estaría definido de una forma ambigua, ya que dependería del grado de aproximación de la velocidad u a u_e . Por ejemplo se podría definir el espesor δ de modo que $u(x, \delta) = 0.99u(x)$, pero también se podría definir de modo que $u(x, \delta) = 0.995u(x)$, con lo que obtendríamos un valor mayor para el espesor.

Sin embargo se pueden definir espesores de la capa límite de una forma más física, y están asociados a cada una de las ecuaciones del movimiento. Así, el espesor de desplazamiento, δ^* , esta asociado a la ecuación de la continuidad. La masa que atraviesa una sección de la capa límite es

$$\int_0^\infty \rho u dy,$$

y si no existiese capa límite, la masa sería

$$\int_0^\infty \rho_e u_e dy,$$

y para que ambas magnitudes fuesen idénticas sería necesario desplazar la pared una cantidad δ^* tal que

$$\int_0^\infty \rho u dy = \int_{\delta^*}^\infty \rho_e u_e dy = \int_0^\infty \rho_e u_e dy - \int_0^{\delta^*} \rho_e u_e dy,$$

de modo que

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy, \quad (11)$$

ya que ρ_e y u_e no dependen de y . Esta definición del espesor ya no depende del grado de aproximación que se quiera con respecto a la velocidad exterior.

Asociado a la ecuación de cantidad de movimiento se tiene el espesor de cantidad de movimiento, δ^{**} , que es la distancia adicional a δ^* que hay que desplazar la pared para la igualdad de cantidad de movimiento, esto es

$$\int_0^\infty \rho u^2 dy = \int_{\delta^* + \delta^{**}}^\infty \rho_e u_e^2 dy = \int_0^\infty \rho_e u_e^2 dy - \int_0^{\delta^* + \delta^{**}} \rho_e u_e^2 dy,$$

de modo que

$$\delta^* + \delta^{**} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u^2}{\rho_e u_e^2}\right) dy,$$

y sustituyendo el valor de δ^* dado en (7) se tiene

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad (12)$$

que representa el déficit de cantidad de movimiento.

Se pueden definir también espesores asociados a las distintas formas de la ecuación de la energía. Por ejemplo, asociado a la entalpía de remanso sería

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{h_0 - h_p}{h_{0e} - h_p}\right) dy. \quad (13)$$

La evolución del espesor de cantidad de movimiento, δ^{**} , a lo largo de la capa límite está relacionada con el coeficiente de fricción, mientras que la evolución de Δ está relacionado con el coeficiente de transmisión de calor, como se verá en lecciones posteriores.

3 Temperatura de recuperación

La ecuación (3) de la energía puede escribirse en la forma

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu - \frac{k}{c_p} \right) \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} \right],$$

y, teniendo en cuenta que el número de Prandtl es $Pr = \mu c_p / k$, la ecuación anterior puede escribirse en forma

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{1 - Pr}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(h_0 - \frac{1}{2} u^2 \right) \right]. \quad (14)$$

Cuando el número de Prandtl es igual a la unidad, la ecuación anterior toma la forma

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y} \right). \quad (15)$$

En el caso de que la pared esté aislada térmicamente, la condición de flujo de calor nulo en la pared se traduce en $(\partial h_0 / \partial y)_{y=0} = 0$, ya que $u (\partial u / \partial y) = 0$ por ser $u = 0$ en $y = 0$. Por lo tanto, la solución $h_0 = h_{0e}$ satisface la ecuación (11) y las condiciones de contorno $(\partial h_0 / \partial y)_{y=0} = 0$ y $h_0 = h_{0e}$ en $y \rightarrow \infty$. Esto significa que la temperatura de la pared coincide con la de remanso de la corriente exterior, esto es

$$T_p = T_{0e} = T_e \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right). \quad (16)$$

Debido a que el número de Prandtl no es la unidad, si no un poco menor, la ecuación (10) nos indica que la temperatura de la pared va a ser un poco menor que la de remanso

$$T_p = T_e \left(1 + \Re \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right), \quad (17)$$

donde \Re es el factor de recuperación, función del número de Prandtl, que es menor que la unidad pero muy próximo a uno.

4 Analogía de Reynolds

En la capa límite de una placa plana la corriente exterior es uniforme, de modo que u_e es constante, lo mismo que la presión y la temperatura. Por lo tanto $dp_e/dx = 0$ y h_{0e} es también constante. Si la placa está a temperatura constante T_p ($h_p = c_p T_p$) y el número de Prandtl es la unidad, la ecuación (11) de la energía puede escribirse en la forma

$$\rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (18)$$

donde

$$\theta = \frac{h_0 - h_p}{h_{0e} - h_p}.$$

Esta ecuación ha de integrarse con las condiciones

$$\theta = 0 \text{ en } y = 0 \text{ y } \theta = 1 \text{ en } y \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Si ahora escribimos la ecuación (2), sin gradiente de presiones, utilizando la variable $\vartheta = u/u_e$, la ecuación toma la forma

$$\rho u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right), \quad (20)$$

que ha de integrarse con las condiciones

$$\vartheta = 0 \text{ en } y = 0 \text{ y } \vartheta = 1 \text{ en } y \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Como puede verse, la ecuación (14) con las condiciones (15) es idéntica a la (16) con las condiciones (17). Por lo tanto $\theta(x, y) \equiv \vartheta(x, y)$ ².

El flujo de calor en la placa esta dado por

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p} (h_{0e} - h_p) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (22)$$

mientras que el esfuerzo en la pared es

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu u_e \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e^2, \quad (23)$$

donde C_f es el coeficiente de fricción.

De la ecuación (18) se obtiene

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{c_p q_p}{k (h_p - h_{0e})},$$

y de (19)

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{2} C_f \frac{\rho_e u_e}{\mu}.$$

De la igualdad de ambas derivadas se tiene

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{q_p}{\rho_e u_e (h_p - h_{0e})} = St, \quad (24)$$

ya que $\mu c_p / k = Pr = 1$. La ecuación (20) es la analogía de Reynolds, mediante la cual se obtiene que el número de Stanton, St , es igual a la mitad del coeficiente de fricción.

El flujo de calor en la pared toma la forma

$$q_p = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e (h_p - h_{0e}) = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e \left(h_p - h_e - \frac{1}{2} u_e^2 \right).$$

²Tambien sería necesario que $\theta_i(y) \equiv \vartheta_i(y)$.