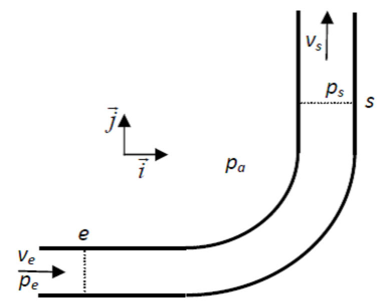
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO (EIAE)

Mecánica de Fluidos I **Problema de ecuaciones generales**

Por un tubo de área A circula un líquido de densidad ρ, en ausencia de fuerzas másicas y con efectos viscosos despreciables. Entre dos secciones, e y s, donde las magnitudes fluidas son uniformes, hay un un codo a 90º que genera una caída de presión desde p_e en la sección e, hasta p_s en la sección s. Por el exterior del tubo actúa la presión ambiente p_a. Se trata de relacionar la fuerza que el líquido ejerce sobre el codo con las magnitudes que aparecen en el problema. Para ello utilicen las ecuaciones de la continuidad y cantidad de movimiento en forma integral al volumen de control comprendido entra las secciones e, s y las paredes del tubo.

SOLUCIÓN



La ecuación de la continuidad en forma integral se reduce a

$$\int_{\Sigma} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

donde $\vec{n}$ es la normal exterior al volumen de control (de líquido). La velocidad $\vec{v}_c = 0$ en todas las superficies porque son fijas. El producto $\vec{v} \cdot \vec{n} = -v_e$ en la sección de entrada e; $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_s$ en la sección de salida s y $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ en el resto de las superficies fijas porque la condición de contorno en estas paredes es que la velocidad del líquido en contacto con ellas es nula. Por lo tanto

$$\int_{\Sigma} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \;\Rightarrow\; -v_e A + v_s A = 0 \;\Rightarrow\; v_e = v_s = v.$$

La ecuación de cantidad de movimiento en forma integral, sin efectos de fuerzas másicas y viscosidad, es

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = -\int_{\Sigma} (p - p_a) \vec{n} d\sigma,$$

ya que al ser Σ una superficie cerrada, la integral $\int_{\Sigma} p_a \vec{n} d\sigma = p_a \int_{\Sigma} \vec{n} d\sigma = 0$. El flujo de cantidad de movimiento sólo es distinto de cero en las secciones e y s. El resto de las secciones son paredes sólidas y la condición de contorno es que la velocidad del fluido en contacto con una pared es igual a la velocidad de la pared, que es nula en este caso. Se tiene

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \rho \left\{ -\vec{i} \int_{\Sigma_e} v_e^2 d\sigma + \vec{j} \int_{\Sigma_s} v_s^2 d\sigma \right\},$$

ya que $\vec{v}_e = v_e \vec{i}$, $\vec{n}_e = -\vec{i}$,$\vec{v}_s = v_s \vec{j}$ y $\vec{n}_s = \vec{j}$, siendo $\vec{i}$ el vector unitario en la dirección horizontal y $\vec{j}$ en la dirección vertical, positivos en la dirección del movimiento. Dado que las velocidades son uniformes en ambas secciones y, de acuerdo con la ecuación de la continuidad, son iguales, se tiene

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \rho \left\{ -\vec{i} \int_{\Sigma_e} v_e^2 d\sigma + \vec{j} \int_{\Sigma_s} v_s^2 d\sigma \right\} = \rho A \left(\vec{i} v_s^2 - \vec{j} v_e^2 \right) = \rho A v^2 \left(-\vec{i} + \vec{j} \right).$$

La integral de las fuerzas de presión es

$$-\int_{\Sigma} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma = -\int_{\Sigma_e} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma_s} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma_{Tubo}} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma.$$

Las dos primeras integrales del segundo miembro, por ser la presión uniforme en las secciones se tiene

$$-\int_{\Sigma_e} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma_s} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma = \vec{i}\,(p_e - p_a)\, A - \vec{j}\,(p_s - p_a)\, A = A\left[(p_e - p_a)\, \vec{i} - (p_s - p_a)\, \vec{j}\right].$$

La integral expendida a la pared del tubo es la fuerza que dicha pared (codo) ejerce sobre el fluido, debido a que la normal es exterior al volumen de fluido. Si lo que se quiere es la fuerza $\vec{F}$ que el fluido ejerce sobre el codo, esta es

$$\vec{F} = \int_{\Sigma_{Tubo}} (p - p_a)\, \vec{n} d\sigma,$$

de modo que la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\rho A v^2 \left(-\vec{i} + \vec{j}\right) = A\left[(p_e - p_a)\, \vec{i} - (p_s - p_a)\, \vec{j}\right] - \vec{F},$$

y la componente en la dirección del eje horizontal es

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = A\left[(p_e - p_a) + \rho v^2\right],$$

y en la dirección vertical es

$$F_y = \vec{F} \cdot \vec{j} = -A\left[(p_s - p_a) + \rho v^2\right].$$